

水やガラスなど、一つの波長では屈折率が光の進行方向や偏光面方位に依存せず定数となる物質群は光学的等方性物質と呼ばれている。光学的等方性物質は入射偏光を変えずにそのまま出射するので*1、偏光顕微鏡下では暗視野となる。これに対して液晶は一つの波長においても、光の進行方向や偏光面方位で屈折率が異なる光学的異方性物質（複屈折物質 (birefringent medium)）であり、入射光の偏光状態は出射時には変化していることが普通である。偏光変化は液晶の配向に依存するので、外場などにより液晶の配向を制御すれば出射時の偏光を制御できる。これが液晶表示素子の基本的な動作原理である。そしてまた、液晶が偏光顕微鏡下で明るくなったり着色して見えるようになる根本である。偏光顕微鏡下で液晶が作り出す文様は液晶が複屈折物質であるが故に見られるものである。この章では、複屈折物質の光学的性質を扱うが、前段として、偏光の表記と屈折率分散についての説明を行う。

1 光と偏光の表記法

電磁波 (electromagnetic wave) としての光の表記には、物理屋流儀と光学屋流儀がある。物理屋の波表記は次式のように座標項が正、時間項が負である。

$$E = E_0 \sin(kz - \omega t + \delta) \quad (1)$$

これに対して、光学屋流儀では時間項と距離項が次式の様に逆になる。

$$E = E_0 \sin(\omega t - kz + \delta) \quad (2)$$

ただし、 $k = 2\pi/\lambda$ は波数、 $\omega = 2\pi\nu$ は角振動数である。流儀により式中の符号が逆になったり、後述する円偏光 (circular polarized light) の左右の定義が逆になる。このテキストでは、光学屋流儀を用いる*2*3。

図1に2つの流儀での波を示す。いずれの波も右側に進行する正弦波だが、初期位相が反転している*4。

*1 斜入射では偏光により反射率が変化するために、偏光状態が変化してしまうが、物質自体には偏光状態を変化する働きはない。

*2 コレステリック液晶の特異的な反射挙動について、多くの液晶のテキストで光学屋定義を使った議論をしているので、このテキストでも光学屋定義を用いることにした。液晶の本の中では、Ingo Dierking の *Textures of Liquid Crystals* では物理屋定義の円偏光を用いている気がする。

*3 光学屋流儀に統一するつもりだけれども、物理屋流儀が紛れ込んでいるかもしれない。気がついたらお教え頂けると有り難い。

*4 波と言えば三角関数であるけれども、計算の便利さから複素数による波の表記もよく行われる。複素数表記だと物理屋流儀は $E = E_0 e^{i(kz - \omega t + \delta)}$ 、光学屋流儀では $E = E_0 e^{i(\omega t - kz + \delta)}$ となる。

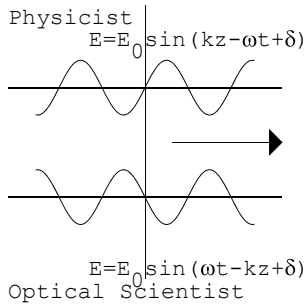


図 1: 波の物理屋定義と光学屋定義

2 光学定数と反射率

屈折率 n (refractive index) と消衰係数 k (extinction coefficient) を合わせた $\hat{n} = n - ik$ は複素屈折率 (complex refractive index) と呼ばれ、これが分かれば表面での反射率などを計算により求められる*5。

屈折率は物質中の光速 v に係わる定数で*6、物質中の光速と真空中の光速 c の間には

$$v = c/n \quad (3)$$

という関係がある*7。屈折率が n_0 と n_1 の界面での入射角 (incident angle) と屈折角 (refraction angle) は、それぞれの角度を θ_0 、 θ_1 として、

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 \quad (4)$$

となる。

消衰係数 k は光の吸収に係わる定数で、スペクトル測定により求められる吸収係数 (absorption coefficient) $\alpha = -\log_{10}(T)/(2.303d)$ と

$$k = \frac{\alpha \lambda}{4\pi} = \frac{\alpha c}{2\omega} \quad (5)$$

*5 複素屈折率が $\hat{n} = n - ik$ と消衰係数の前の符号がマイナスなのは波を $E = E_0 \cos(\omega t - kz + \delta)$ と距離の項の符号がマイナスになる表記を行ったためで、物理屋定義の波を使う場合には複素屈折率は $\hat{n} = n + ik$ となる。

*6 光の速度には位相速度 (phase velocity) と群速度 (group velocity) があり、ここで定義される v は位相速度である。屈折率分散がない場合には位相速度と群速度は等しくなる。

*7 真空中の波数を k として、 $v = \lambda \nu = (2\pi/k)(\omega/2\pi) = \omega/k$ である。物質中でも振動数は変わらないので、物質中の波数 k' は $k' = nk$ となる。

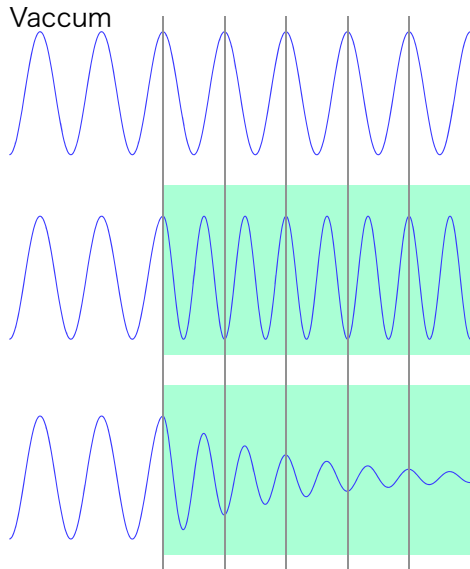


図 2: n, k と物質中の波の様子。一番上は全区間が真空中で波長の変化はない。真中は右半分が 1 より大きい屈折率 (かつ $k=0$) の物質で物質中での波長が短くなっている (本来界面があれば反射があるべきだがそれは無視している)。下は屈折率が 1 より大きく消衰係数も 0 でない値の場合で、物質中で強度は指数関数減少している。

という関係がある。ただし d は試料の厚み、 T は透過率 (transmittance) である。 α は単位長さあたりの吸収を示す定数で、 k は電場が 1 回振動する毎の吸収の定数である*⁸。

2.1 垂直入射の反射率

空気界面から吸収のある物質に光が垂直入射する場合のエネルギー反射率は複素屈折率 \hat{n} を用いて

$$R = \left(\frac{\hat{n} - 1}{\hat{n} + 1} \right)^2 = \frac{(n - 1)^2 + k^2}{(n + 1)^2 + k^2} \quad (6)$$

となる*⁹。この式は、消衰係数が大きい (吸収が強い) と反射率 (reflectance) が高くなることを主張している。吸収が強いと反射が強くなるのは不思議な気がする事柄ではある。屈折率も消衰係数も、入射光の電場によって物質に誘起される双極子の大きさにかかわる物質定数である*¹⁰。物質からの反射は物質最表面で誘起された双極子からの放射によるも

*⁸ k が同じなら、波長が長くなるほど α は小さくなる。

*⁹ 空気の屈折率を 1 としてある。空気の屈折率は、より正確には 1.0003 程度だが液晶がらみの実験で、1 と近似したことが問題になることはない。

*¹⁰ 両者の違いは入射光の電場に対して屈折率は同位相、消衰係数は 90° 遅れの双極子が誘起されること。

のなので、屈折率が大きくても、消衰係数が大きくても反射率は高くなる。銀の複素屈折率は可視領域で $n = 0.13$ 、 $k = 3.07$ で、小さな屈折率と大きな消衰係数が銀の反射率 (0.95) の起源である*¹¹。残りの 0.05 ほどの光は反射されずに銀に吸収される。通常の光では吸収による温度上昇は僅かであるが、強いパルスレーザー光を銀鏡で反射使用とすると、レーザー光があたった部分の銀膜が蒸発して照射部分が素通しのガラスになることがある。

白金のように、空気中で酸化等の反応を生じず、また、可視領域に金のような吸収構造を持っていない物質を微粒子にして、光が粒子間で多重反射するようにすると、反射毎に繰り返し光を吸収するために黒色となる。白金の光学定数は広い波長範囲で小さな n と大きな k を持つため、波長依存性の低い吸収体として、広い波長範囲でのスペクトル強度測定などに用いられている。

透明な物質の場合は $k = 0$ となるので、垂直入射での空気界面でのエネルギー反射率 R は

$$R = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2} \quad (7)$$

となる。屈折率が n_2 の物質に屈折率 n_1 の物質から光が垂直入射する場合の界面でのエネルギー反射率 R は

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2} \quad (8)$$

である。

光は電磁波であり、電場は交流振動をしている。電波の領域では電磁波の振動を直接観測できるが、光は周波数が高すぎるため、通常の光検出器では電磁波の振幅の自乗に比例する光強度しか測定できない。このため、単一界面での反射を議論する場合などはエネルギー反射率を使うのが便利ではあるが、エネルギー反射率では位相情報が失われているので、干渉を取扱うことができない。干渉が問題となるときには、自乗する前の振幅反射率を考える必要がある。

振幅反射率 r は

$$r = \frac{(n_2 - n_1)}{(n_2 + n_1)} \quad (9)$$

*¹¹ 屈折率が 1 未満だと光速が真空中の値を超えてしまうので、相対性理論 (theory of relativity) に反しないかと不思議に思う人もいると思う。光がパルスとして伝播するときに係わるのは群速度 ($d\omega/dk$) で、こちらは真空中の光速を越えることがないことが知られている。

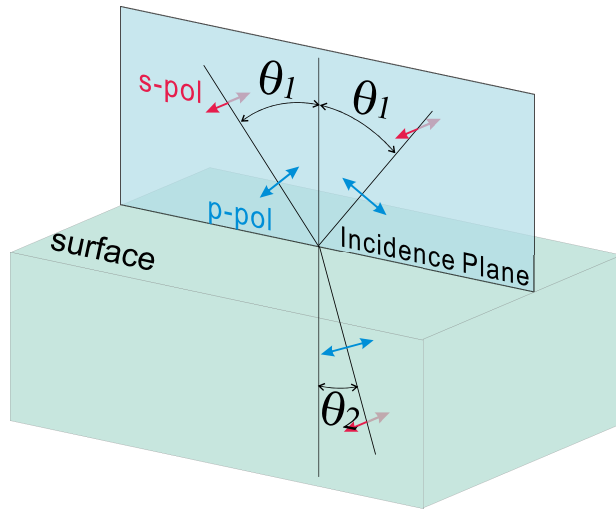


図 3: 斜入射の入射面と p 偏光、s 偏光

となる。この式は $n_2 > n_1$ の場合には反射波の位相は入射波と逆位相、 $n_2 < n_1$ の場合には同位相になることを示している*12。

2.2 斜入射の反射率 (oblique-incidence reflectivity)

入射面 (plane of incidence) 内で電場が振動する光を p 偏光と呼び、電場の振動面が入射面に垂直の光を s 偏光と呼ぶ。それぞれドイツ語で平行を意味する parallel と垂直を意味する senkrecht の 1 文字目を取っている*13*14。入射面に対する電場の振動方向で偏光を区別するのは、斜入射時の挙動が両者で異なるためである。s 偏光では電場の振動方向は常に境界面に平行であるが、p 偏光では境界面に平行な成分の大きさは入射角に依存する。この違いが両者の反射率の違いをもたらしている。

吸収がない物質 ($k = 0$) の場合、空気界面から入射する p 偏光と s 偏光の振幅反射率

*12 シャボン玉のように、両側を空気界面で挟まれた膜では入射側界面の反射光は入射光と同位相、出射側界面の反射光は逆位相になる。もし、膜厚が光の波長に比べて十分に薄くて、入射側と反射側の光路長による位相差が無視出来るなら、反射光は強度がほぼ同じで逆位相の波の重ね合わせになるので、ほぼ 0 になると予想できる。実際、シャボン玉で最も薄い膜は、反射がほとんどなく、膜に穴が空いてしまっているかのように見える。

*13 英語だと両方とも p になってしまう……。s 偏光の s は垂直の s と覚えても良いかも知れない。

*14 p 偏光、s 偏光は光学・物理系研究者に使われている名称で、エレクトロニクス系研究者は s 偏光を、水平偏波/TE(Transverse Electric) 波、p 偏光を、垂直偏波/TM(Transverse Magnetic) 波と呼ぶ。

は次のようになる^{*15}。

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \\ r_s &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 θ_1 は入射角、 θ_2 は出射角である。エネルギー反射率はこれらの2乗で以下のようになる。

$$\begin{aligned} R_p &= |r_p|^2 = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)} \\ R_s &= |r_s|^2 = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad (11)$$

垂直入射の場合は、入射角と出射角ともに 0° で、p偏光とs偏光には物理的な差はない。空気から屈折率のより大きな物質への入射であることを考えると、反射光の位相は入射光から反転することになる。確かにs偏光の符号は反転している。ところが、p偏光の符号は入射光と同じになっている。物理的には同じ状況なのに、2つの偏光の間で符号が違って、p偏光の位相が入射光と同じであるのは、気味の悪いことである。実は、この符号の付け方は光学屋流儀によるもので、物理屋流儀では、垂直入射の場合には、s偏光、p偏光とも符号は反転する。

では、何故光学屋が気味の悪い符号の付け方を使っているかというと、座標系の掌性(handedness or chirality)が変らないようにするためである。反射は鏡に映す操作であり、 x 軸と y 軸の関係はそのままにして z 軸の向きだけ反転すると、座標系が右手系(right-handed system)から左手系に反転してしまう^{*16}。反射後の座標も右手系とするためには、 x 軸か y 軸のどちらかの軸方向を反転する必要がある^{*17}。その結果として、物理的には同一事象であるはずの、垂直入射時のp偏光とs偏光の符号が逆になってしまう。物理屋流儀では、垂直入射時のp偏光とs偏光の符号は同じとしているので、気持ちの悪さはないけれども、反射後の座標系の掌性が反転していることには注意が必要である。

^{*15} フレネルの式と呼ばれ、現在の教科書では、ほぼマクスウェルの方程式からフレネルの反射の式を導く流れになっている。でも、フレネルはマクスウェルより前の人で、界面における振動の連続性から式を導出している。歴史的な事柄に関しては、エーテルと電気の歴史 E. T. ホイッテカー (著), 霜田 光一, 近藤 都登 (翻訳), 講談社が参考になる。

^{*16} 正確には進行方向の反転があり、それが左右反転に見えている。理由の説明はしていないけれども、朝永振一郎のエッセイにこの話題を扱ったものがある。朝永振一郎「鏡の中の物理学」講談社学術文庫(1976)

^{*17} 右手系は右手の親指、人先指、中指を違いに直交するようにしたときに、それぞれの指の指す方向を親指から、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正の方向とする座標軸体系。左手系はそれを左手で行った体系。両者は鏡像関係にある。

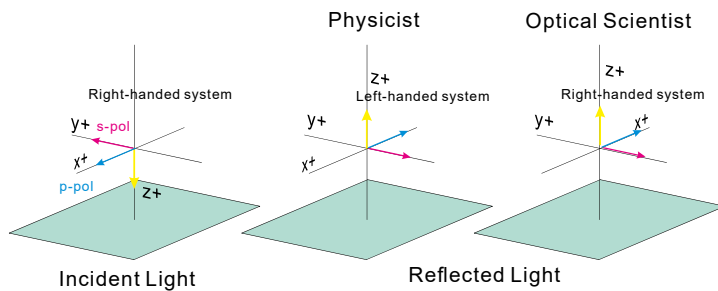


図 4: 垂直入射では両方の偏光とも反射波の位相は反転するが、光学屋流儀では座標の反転があるため、一方の偏光の符号がさらに反転する。

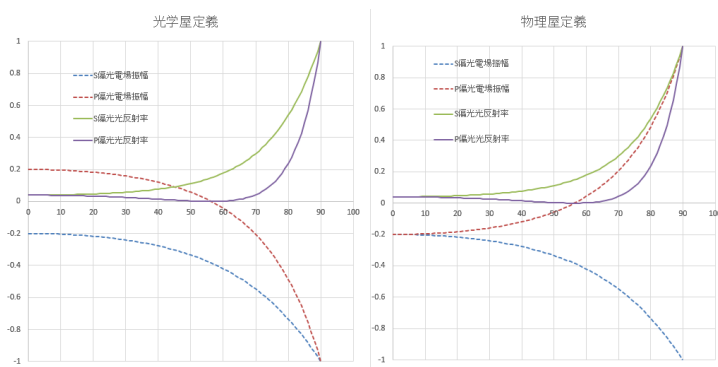


図 5: 斜入射の反射率。この図は、屈折率 1.5(クラウンガラスの典型値) で計算している。垂直入射の反射率は 4% 程度である。

図 5 に示すように s 偏光の反射率は入射角の単調増加関数である。それに対して、p 偏光の反射率はある角度までは減少し、 $\tan \theta = n_2/n_1$ となる角（ブリュースター角：Brewster angle）で 0 となった後に、増加に転じる。

ブリュースター角を挟んで s 偏光に対する p 偏光の位相は逆位相から同位相に反転する*18。図 6 にブリュースター角を挟んでの反射の様子を示した。反射光は入射光により物質中に誘起された振動双極子 (oscillating dipole) からの放射により生じる。ブリュースター角では、振動双極子の振動方向は出射角と等しく出射方向からは振動はみられない。このため、反射光は存在出来ない。またブリュースター角を挟んで、出射側から見た振動子の位相が反転する。これがブリュースター角で出射波の位相が反転する物理的機構である。ブリュースター角で、p 偏光の位相は不連続に反転するが、p 偏光反射率が 0 となるため、入射面に対して 45° 方向の直線偏光を入射した場合は、図 5 に黒破線で示した

*18 光学屋流儀の場合。物理屋流儀では同位相から逆位相への変化となる。

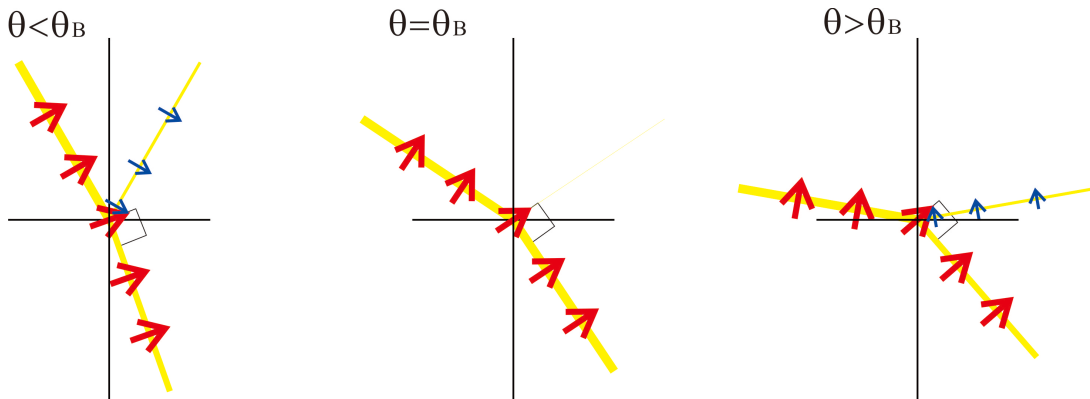


図 6: ブリュースター角を挟んでの変化。

ように、ブリュースター角に近づくにつれて、偏光面が水平になり、ブリュースター角を過ぎると傾き方向が反転する。偏光状態変化は連続で飛びはない。

2.2.1 吸収がある場合

吸収のない屈折率 n_1 の媒体から吸収のある屈折率 \hat{n}_2 の媒体への入射でも、s 偏光と p 偏光での反射率に差はでる^{*19}。p 偏光はある角度で反射率最小となる。しかし、吸収がない場合とは異なり反射が完全になくなることはない。

3 屈折率と誘電率

物質の電磁波に対する性質は誘電率により定まる。光も波長の短い電磁波であるので、光と物質の相互作用も誘電率により定まっている。しかし、光学が電磁気学の成立以前に発達したため、誘電率ではなく屈折率が歴史的に用いられる。もちろん、電磁波としての光の記述も可能であり、その式と光学の式の比較から屈折率と誘電率の関係が導かれる。電磁気学によれば、真空中の光速 c は、真空の誘電率 (permittivity of free space) を ϵ_0 、真空の透磁率 (permeability of free space) を μ_0 として

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (12)$$

で与えられる。また、比誘電率 ϵ (relative permittivity) の物質中の光速は $v = c/\sqrt{\epsilon}$ となる。一方、光学の分野では、物質中の光速は、物質の屈折率を n として、 $v = c/n$ で

^{*19} n_1 の方が複素屈折率表記でないのは、一方は透明な物質でないと、そもそも界面まで光がまっとうに到達しないため。薄膜の場合は、こちらにも複素屈折率を用いる必要が生じる。

ある。両者を比較すると、 $n = \sqrt{\epsilon}$ という関係が成立する。物質の比誘電率に関しても、エネルギーの吸収を含めた複素比誘電率 $\hat{\epsilon} = \epsilon_1 - i\epsilon_2$ が用いられる。複素屈折率と複素誘電率の間には以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= n^2 - k^2 \\ \epsilon_2 &= 2nk\end{aligned}\tag{13}$$

逆に比誘電率から屈折率を導く式は次のようになる。

$$\begin{aligned}n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \\ k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}}\end{aligned}\tag{14}$$

4 屈折率の波長分散

透明な物質では光と物質の間での最終的なエネルギーの授受はない。しかし、物質と光は相互作用をしており、その結果として物質中の光速が真空中と異なる。光は電磁波であるが、ほとんどの透明物質では電場に対する応答が磁場に対する応答より遙かに大きい。そのため、電場による相互作用のみを考えることになる。外部電場による物質の誘電応答機構は大きく、電子雲の歪みによるもの、原子（イオン）の変位によるもの、分子の方向変化によるものに分けられ、それぞれ電子分極 (electronic polarization)、原子（イオン）分極 (atomic polarization、ionic polarization)、配向分極 (orientational polarization) と呼ばれている。電子分極は電場により電子雲が平衡位置から変位するもの、原子分極は電荷のある原子が外部電場により平衡位置から変位するもので、両者とも変位に対して復元力が働く。配向変化には復元力は存在しない。

3種類の分極機構は、低周波極限ではいずれも電場に応答するが、高周波では応答が間に合わなくなるため、誘電率には寄与しなくなっていく。外場に応答出来なくなる周波数は分極機構に依存する。配向分極がもっとも低周波数で応答出来なくなり、原子分極がその次、最後に残るのが電子分極で、それも可視から紫外領域より高周波では応答できなくなる。物質の分極が応答出来なくなった極限で比誘電率（そして屈折率）はほぼ1となる。

これら3つの分極機構が存在する系の誘電率の周波数依存性は図7のようになる。原子分極と電子分極には復元力があるので、共鳴構造 (resonance structure) があるのに対して、配向分極には復元力がないために共鳴はない。

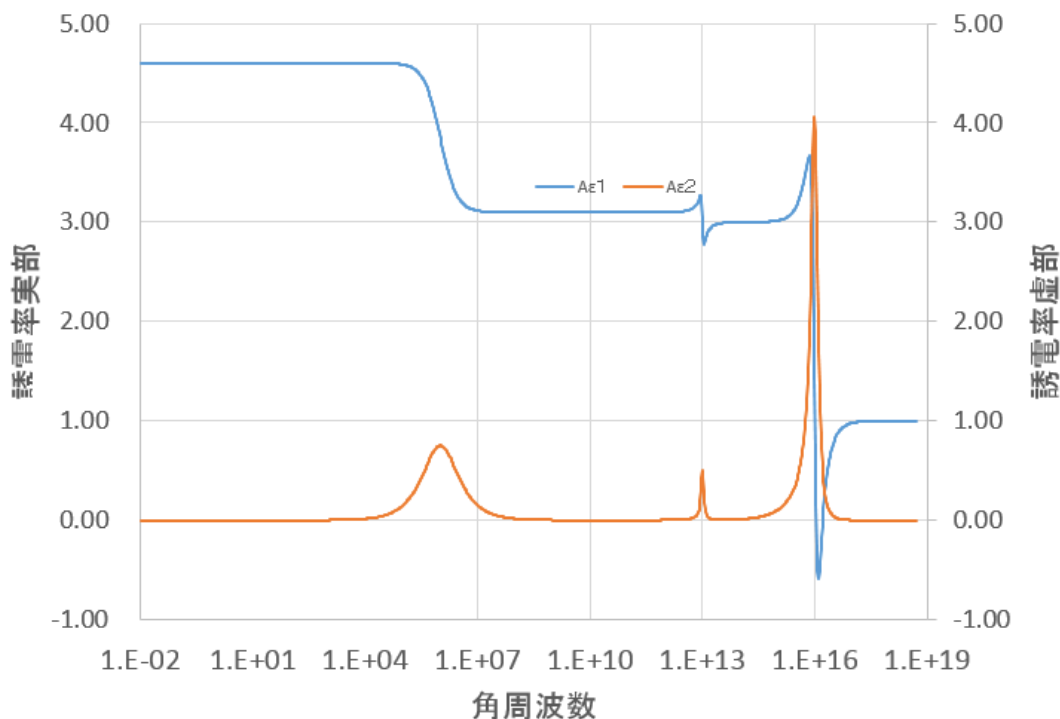


図 7: 誘電率の周波数依存性。横軸は対数スケール。図には緩和は 3 つしか記されていないが、それぞれの緩和は実際に存在する複数の緩和をまとめて表現したものである。たとえば、原子分極は分子の赤外吸収スペクトルに対応するものであるが、2 原子分子を除いては、赤外領域には必ず複数の吸収ピークが存在している。

5 誘電率の古典的理論

誘電率の周波数依存性を理論的に扱うのには 3 通りの方法がある。1 番目の方法は、物質を古典的振動子、光を電磁波として扱う古典論。2 番目の方法は、物質にはシュレディンガー方程式 (Schrödinger equation) を適用するが光は電磁波として扱う半古典論 (semiclassical theory)。そして 3 番目の方法は物質も光も量子論で扱う完全な量子論である。量子論を用いるやり方が 2 つあるのは、シュレディンガー方程式は、そのままでは粒子数の変化に対応出来ないためである。光の吸収や放出を考えると、電子や原子はエネルギー準位を変化させるだけだが、光子の方は吸収・放出の前後で数が変化する。そこで、物質のエネルギー準位はシュレディンガー方程式で扱い、光に関しては古典的な電磁波として扱わざるをえない。量子論で粒子数の変化を扱うためには、場の量子論 (quantum

field theory) を用いる必要がある*20。

原理的には、どの理論でも物質の光学的性質を記述出来るが、その記述の複雑さや必要とする背景知識には違いがある。ここでは、もっとも単純な古典的モデルで話を進める。

5.1 古典的モデル

古典的モデルでは物質を電荷のある振動子 (oscillator)、光を電磁波として扱う。光は電場と磁場の波であるが、物質との相互作用は電場が主体であるため、電場による部分のみを考える。1つの振動子に光 (交流電場) がかった時の応答は次の運動方程式 (equation of motion) で与えられる。

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r - m\gamma \frac{dr}{dt} - eE \quad (15)$$

この方程式は強制減衰振動の方程式で、解は一般解と特解を組合わせて与えられる。しかし、入射光に対する物質の応答という観点からは、定常光照射下の定常状態では、減衰項 (damping term) の効果により、初期応答は影響を及ぼさずに、初期状態によらず外部電場と同じ周期で動く応答のみとなる。このため、 r を外部電場と同じ周波数成分の $re^{i\omega t}$ として、これを上の方程式に代入して振幅を求める。

強制減衰振動の扱いに慣れていない人のために、以下に単振動から強制減衰振動までの扱いを簡単に紹介する。

5.1.1 単振動

単振動の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

で与えられる。ここで、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

*20 場の量子化をイメージで説明してみよう。調和振動子 (harmonic oscillator) の波動関数はエネルギーが量子数に線形に変化していく。量子数の増加はシュレディンガー方程式の枠組みでは、振幅の不連続な増加という物理的な意味を持つが、振動を引き起こしているものを擬似的に粒子と考えると、この粒子の数が変化しているという認識も可能になる。この場合には、調和振動という場を量子化することによりフォノンという粒子が出現する。同様に、光子や電子を作り出す場を考えて、それを量子論的に扱えば、粒子の増減を記述できる枠組みとなる。

とすると、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

となる。この方程式の一般的な解を三角関数で書くと

$$x = a \cos(\omega_0 t - \delta)$$

となる。一方これを $x = e^{\alpha t}$ の指数関数の形式で書くと、方程式に代入して

$$\alpha^2 e^{\alpha t} = -\omega_0^2 e^{\alpha t}$$

より、 $\alpha = \pm i\omega_0$ であり、一般解は

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

となる。いずれにせよ、一定の周期での単振動となる。

5.1.2 減衰振動

単振動では一旦振動をはじめると、同じ振幅で振動運動を繰り返す。運動を抑止する要素があれば、時間とともに振幅は減少し、最終的には振動が停止する。振動を抑止する機構として、通常は、速度に比例する粘性抵抗を導入する。この時の運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - B \frac{dx}{dt}$$

である。ここで、 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ および $2\gamma = \frac{B}{m}$ と置くと式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

となる。ここで、解として $x = e^{\alpha t}$ を仮定して代入すると、

$$(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) e^{\alpha t} = 0$$

より

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

となる。これを3つの場合に分けて扱う。 $\gamma^2 < \omega_0^2$ の場合 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega' < \omega_0$ とすると、

$$x(t) = Ae^{-\gamma t + i\omega' t} + Be^{-\gamma t - i\omega' t} = \alpha' e^{-\gamma t} \cos(\omega' t - \delta)$$

であり、固有振動よりは低い周波数で振動しながら減衰していく運動となる。

$\gamma^2 > \omega_0^2$ の場合 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma' > 0 (< \gamma)$ と置くと、

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t + \gamma' t} + c_2 e^{-\gamma t - \gamma' t}$$

と振動せずに減衰する状態となる。

$\gamma^2 = \omega_0^2$ の場合の一つの解は $e^{-\gamma t}$ であるが、もう一つの解として、 $te^{-\gamma t}$ を含めると、

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$$

となる。これらは初期条件に依存し、最初の項は有限の振幅から速度0でスタートした状態に、2番目の項は、原点からある速度で飛出した状態に対応している。

5.1.3 強制振動

振動系に周期的な外力が加わっているのが強制振動である。強制振動では周期的な外力の他に、初期条件で決る振動系の振動運動もあり、両者の重ね合せにより運動が定まる。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos \omega t$$

ここで、

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, f_0 = \frac{F_0}{m}$$

とすると運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

となる。この式の解は右辺を0とおいた斉次(せいじ)方程式の一般解と非斉次方程式の特解の和となる。斉次方程式に一般解は減衰のない単振動なので、 $x_h = \alpha \cos(\omega_0 t - \delta)$ となる。特解を $x_p = c \cos \omega t$ と仮定して運動方程式に代入すると

$$c(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t = f_0 \cos \omega t$$

であり、 $\omega \neq \omega_0$ の時は $c = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ で最終的な解は

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

となる。これは、固有周期での振動に独立に、周期外力による振動が重畳した状態を表している。

一方、 $\omega = \omega_0$ の時は、 c が無限大になってしまうので、上記の特解は使えない。そこで、特解として $x_p = t(c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t)$ を仮定して、式に代入すると $c_1 = 0$ 、 $2c_2 \omega_0 = f_0$ となる。これより

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{f_0 t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

と解が求められる。長い時間の後には、初期振幅によらず、振幅が無限大に発散する。

5.1.4 減衰強制振動

減衰項と、外力の両方が存在する場合の振動運動である。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

であり、ここで $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、 $\mu = \frac{\alpha}{2m}$ 、 $f_0 = \frac{F_0}{m}$ と置くと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

とまとめられる斉次式の一般解は $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ とおいて

$$x_h = B e^{-\mu t} \cos(\omega' t + \phi)$$

となる。ここでは、減衰が強くなく、振動しながら減衰する場合のみを考えている。方程式の解として $x_p = A \cos(\omega t - \delta)$ を仮定する。すると上の式の左辺 (LW) は

$$\begin{aligned} LW &= \omega_0^2 A \cos(\omega t - \delta) - 2\mu \omega A \sin(\omega t - \delta) - \omega^2 A \cos(\omega t - \delta) \\ &= (\omega_0^2 - \omega^2) A \cos(\omega t - \delta) - 2\mu \omega A \sin(\omega t - \delta) \\ &= \{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\mu \omega \sin \delta\} A \cos \omega t + \{(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\mu \omega \cos \delta\} A \sin \omega t \end{aligned}$$

であり、これより

$$\{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\mu \omega \sin \delta\} A = f_0$$

$$\{(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\mu \omega \cos \delta\} A = 0$$

の二つの式が導かれ、

$$A \cos \delta = \frac{f_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

$$A \sin \delta = \frac{f_0 (2\mu\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

が導かれる。

余弦項は外力と同じ位相で振動する成分、正弦項は 90° 異なる位相の振動成分となる。
振幅は

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}}$$

位相遅れは

$$\tan \delta = \frac{2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

で表される。一般解は $x(t) = Be^{-\mu t} \cos(\omega' t + \phi) + A \cos(\omega t - \delta)$ となるが、長時間経過後は第 1 項は 0 となり、外力と同周期で振動する部分が問題となる。

上記の計算は三角関数を用いて行ったが、指数関数でも計算は可能である。外力を指数で $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 e^{-i\omega t}$ のように表示する。この時に、解を $x_h = A' e^{-i(\omega t - \delta)} = A' e^{i\delta} e^{-i\omega t} = A e^{-i\omega t}$ と仮定し代入すると $-A\omega^2 e^{-i\omega t} - Ai2\mu\omega e^{-i\omega t} + A\omega_0^2 e^{-i\omega t} = f_0 e^{-i\omega t}$ となり、これより $A \{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\mu\omega\} = f_0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\mu\omega} \\ &= \frac{\{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\mu\omega\} f_0}{\{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\mu\omega\} \{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\mu\omega\}} = \frac{\{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\mu\omega\} f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2} \end{aligned}$$

である。この実数部と虚数部を見ると

$$Re(A) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

$$Im(A) = \frac{2\mu\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2}$$

となり、先ほどの余弦項と正弦項に対応している。

囲みの前の式に関して、外部電場を

$$E = E_0 \exp(i\omega t) \quad (16)$$

とすれば、変位 (displacement) も、外場に対する位相遅れの成分も含めて、

$$r = r'_0 \exp(i(\omega t + \delta)) = r'_0 \exp(i\omega t) \exp(i\delta) \equiv r_0 \exp(i\omega t) \quad (17)$$

となる。この式を上の方程式に代入して、微分計算をすると、式は

$$-m\omega^2 r_0 \exp(i\omega t) = -m\omega_0^2 r_0 \exp(i\omega t) + im\gamma r_0 \exp(i\omega t) - eE_0 \exp(i\omega t) \quad (18)$$

となり、これより、 r_0 を求めると

$$r_0 = \frac{-eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \quad (19)$$

となる。

単位体積中の双極子密度を N とすると、分極は

$$P = -Ner_0 \quad (20)$$

なので、これより

$$\epsilon_0 \epsilon E_0 = \epsilon_0 E_0 + P = \epsilon_0 E_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} E_0 \quad (21)$$

となり、両辺を $\epsilon_0 E_0$ で割ると比誘電率は

$$\hat{\epsilon} = 1 + \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (22)$$

となる。これを実数部 ϵ_1 と虚数部 ϵ_2 に分けると

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned} \quad (23)$$

である。この式は単一の分極機構による誘電率の表式である*21*22。

*21 この式は気体のように粒子密度が低く、粒子の分極により生じた電場が他の粒子に影響を与えない前提で導かれたものである。液体や液晶などの凝集体 (condensed matter) では他の粒子の電場の影響により実効電場が異なる。このため共鳴周波数が、この式より低周波側にずれるが、その値を使えば、式の形状は変わらない。

*22 この式は電子分極と原子 (イオン) 分極については、パラメータを変えて、そのまま使える。図7の配向

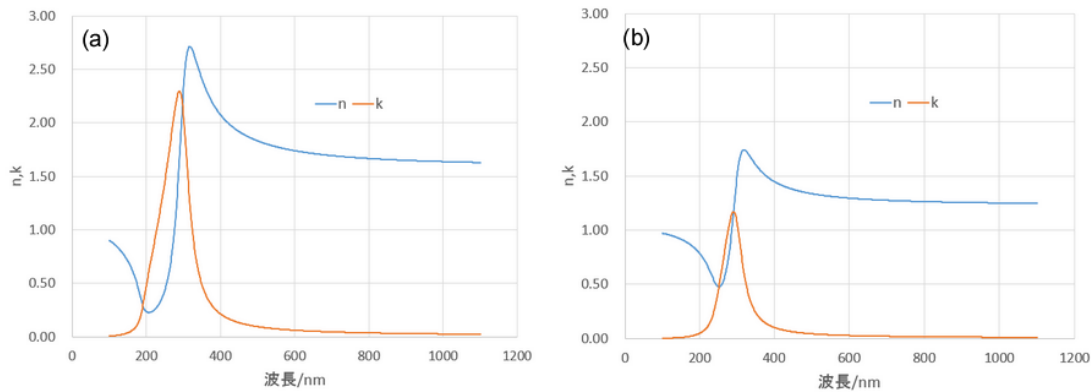


図 8: 古典的モデルに基づいて計算した屈折率と消衰係数の波長依存性。

6 分散

図 8 に屈折率の波長分散 (wavelength dispersion) の一例を示した。この例では、共鳴波長 (周波数) を 300nm とし、それより短波長側 (高周波側) には共鳴要素はないものとしている。図 (b) では $Ne^2/m\epsilon_0$ の値を図 (a) の 1/3 にしている。その結果、吸収の強度は低く、また長波長側の屈折率も小さな値となっている。

屈折率は長波長側から共鳴波長に向けて大きくなっていく。このように短波長側ほど屈折率が大きくなる領域のことを正常分散 (normal dispersion) と呼ぶ。共鳴波長より短波長側に短波長ほど屈折率が小さくなる領域があり、この領域は異常分散 (anomalous dispersion) と呼ばれている。そして、屈折率が 1 未満となっている*²³。

積分吸収強度と吸収帯の低エネルギー側と高エネルギー側の屈折率差との間には関係がある。積分吸収強度 (absorption strength(intensity)) が強いほど、その吸収帯を挟んで

分極については、 $\omega_0 = 0$ として適用使用とすると頭の痛い状況が出現する。配向分極については、どこかのテキストで拾ってきた (要引用元チェック)

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon(\text{inf}) + \frac{\epsilon(0) - \epsilon(\text{inf})}{1 + \omega^2\gamma^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{(\epsilon(0) - \epsilon(\text{inf}))\omega\gamma}{1 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned} \tag{24}$$

という式で計算している。

*²³ 前にもふれたように、この光速は位相速度であり、相対性理論に反するものではない。X 線領域も屈折率は 1 よりわずかに小さく、これを利用して物質側から X 線を入射して界面で全反射させて表面の原子 1 層レベルの配置を測定する芸がある。

の屈折率差が大きくなる*²⁴。

レンズの焦点距離はレンズの形状とレンズを構成する物質の屈折率により定まる。物質の屈折率が波長により変化すると、焦点距離も波長に依存することになる。このため、ある波長で光が一点に収束する条件で、他の波長の光は一点には収束せずぼやけてしまう。これは色収差 (Chromatic aberration) と呼ばれる現象で、色収差があると望遠鏡や写真レンズの性能が大きく低下する。色収差は単レンズでは、屈折率の波長分散がない材料を使わない限りは生じてしまうが、異なる波長分散の材料で作られたレンズを組み合わせると低減できる。様々な特性の光学材料が開発されており、分散の程度は分散を特徴づける定数や、分散式により示されている。

6.1 アッベ数 (Abbe ('s) number)

アッベ数は以下の式で定義される分散を示す指標である。

$$\nu_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (25)$$

である。ここで n_D 、 n_F 、 n_C はフラウンホーファーの D 線 (589.3nm:Na)、F 線 (486.1nm:H)、C 線 (656.3nm:H) の屈折率である*²⁵。しかし D 線は二重線であることもあり、D 線の代りにヘリウムの d 線 (587.56nm) の屈折率を用いた ν_d や*²⁶、より短波長側に重きを置いた ν_e など使われている*²⁷。

分散が大きいほどアッベ数は小さくなる。アッベ数の定義は 2 枚のレンズの組み合わせによる色収差補正計算を簡単にするようになされている。とはいえ、可視領域の 3 波長での屈折率情報しか含まれていないので、それ以外の波長での挙動も必要な場合には、ある領域での屈折率の近似値を与える式が必要になる。一般には以下に示す 2 つの近似式 (approximate formula) が用いられている。

*²⁴ それ故、同じ物質の屈折率 (あるいは誘電率) が、2 つの周波数で大きく異なる場合には、その 2 つの周波数の間に吸収帯が存在するはずである。

*²⁵ フラウンホーファー線は、フラウンホーファー (Fraunhofer) により太陽スペクトル宙に見いだされた暗線 (Fraunhofer lines) につけられた名称で、長波長側の A 線 (759nm) から短波長の K 線 (393nm) までであるが、その後、それ以外のスペクトル線にも小文字ではじまる名称がつけられている。

*²⁶ 日本語 Wikipedia だと d は鉄の 467nm 線に割り振られて、ヘリウムは D3 線という表記になっている。

*²⁷ $\nu_e = \frac{n_e - 1}{n'_F - n'_C}$ 、ただし n_e 、 n'_F 、 n'_C は 546.1nm(Hg)、480.0nm(Cd)、643.9nm(Cd)。

6.2 セルマイヤーの近似式

先ほどの比誘電率の理論式で、共鳴より十分長波長側で吸収がない場合には、消衰係数は0なので、複素誘電率と複素屈折率の関係式より $\epsilon_2 = 0$ と $\epsilon_1 = n^2$ という2つの式が成立する。共鳴から十分に離れた領域では $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg \gamma^2 \omega^2$ なので

$$\epsilon_1 = n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (26)$$

となる。周波数を波長に書換えると、

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{\lambda^2 \lambda_0^2}{(2\pi c)^2 (\lambda^2 - \lambda_0^2)} \quad (27)$$

さらに、波長依存のない部分を定数項としてまとめ、また、より高周波側に存在する共鳴による屈折率の寄与を考えると、

$$n^2 = n_\infty^2 + \frac{A\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \quad (28)$$

となる。これがセルマイヤーの分散式 (The Sellmeier equation) である*28。

可視領域の長波長側では近赤外領域にある吸収の高エネルギー側の分散が影響を及ぼすことがある。この時には、次式のように2つ以上の共鳴成分を入れた式を用いる。

$$n^2 = n_\infty^2 + \frac{A\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} + \frac{B\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)} \quad (29)$$

6.3 コーシーの式

セルマイヤーの式は屈折率の2乗のフィッティングであるので、その一部の平方根をとって平方根を近似して開いて屈折率のフィッティングとした式も用いられる。

$$n = \sqrt{n_\infty^2 + \frac{A\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)}} = n_\infty + \frac{1}{2} \frac{A\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} = n_\infty + \frac{1}{2} \frac{A}{(1 - \lambda_0^2/\lambda^2)} \quad (30)$$

*28 セルマイヤーの分散式のこの導出は今日では多くの本に見られる一般的なものではあるが、セルマイヤーの分散式は、ローレンツによる誘電体の理論以前に提唱されているものであり、上記の導出過程により導かれたものではない。「エーテルと電気の歴史」歴史的な経緯の記述がある。コーシーの分散式の歴史的経緯についても、この本に記載されている。

さらに

$$n = n_{\infty} + \frac{1}{2} \frac{A}{(1 - \lambda_0^2/\lambda^2)} = n_{\infty} + \frac{A}{2} + \frac{A \lambda_0^2}{2 \lambda^2} + \frac{A \lambda_0^4}{2 \lambda^4} = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \dots \quad (31)$$

として、最終的に以下の形態となる。

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (32)$$

これがコーシーの式 (Cauchy's dispersion formula) である。セルマイヤーの式からの近似であることから想像つくように、セルマイヤーの式より適用可能な波長範囲は狭い。光学硝子メーカーのカタログには、セルマイヤーやコーシーの係数が掲載されているものが多い。

7 直線偏光 (linearly polarized light) と円偏光

一つの波長のみを含む光を考えよう。

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \quad (33)$$

上の式では波の振動面は考えていないので、それを x 方向と y 方向の成分に分けて記述する。偏光状態に関しては x 方向と y 方向の位相差のみが関わるので、 x 方向を基準として y 方向にのみ位相差の稿を付け加えることにする。

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= E_{y0} \cos(\omega t - kz + \delta_y \phi) \end{aligned} \quad (34)$$

$\delta_y \phi = 0$ の場合には、 x 軸と y は同振幅、位相で振動しており両者の合成は、図 9 に示すように x 、 y 軸から 45° 傾いた直線偏光となる^{*29}。両方の波の位相が異なる場合には、膨らんだ軌跡を描くような波となる。図 10 に 2 つの波の位相差と生じる軌跡の状態を示した。位相差が増加し $\delta_y \phi = \pi/2$ となると、軌跡は正面からみて円を描くようになる。この状態を円偏光と呼ぶ。直線偏光子を通して円偏光を観察しても、光強度は角度に依存せず一定となる。このため、無偏光状態と見た目の区別は付かない。しかし、円偏光も純粋な偏光状態である^{*30}。位相差が π の場合は、直線偏光となるが、振動面は最初の直線

^{*29} 光学の歴史の中では、磁場の振動面を偏光面、それと垂直な電場の振動面を振動面と呼んでいたらしいのだけれども、このテキストの中では電場の振動面を偏光面と呼んでいる。

^{*30} 光子はスピン 1 の角運動量を持つ素粒子である。円偏光ではスピンの掌性は定まっているが、直線偏光では 2 つのスピン状態が同じ確率で観察される。

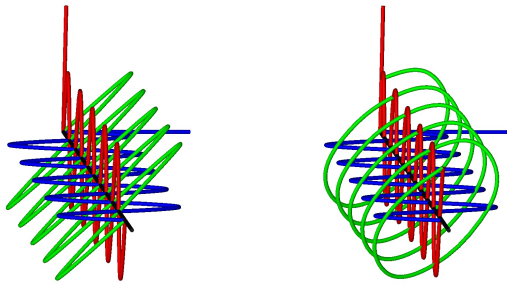


図 9: x 軸と y 軸で位相差が同じ場合 (左) と異なる場合 (右) の偏光状態

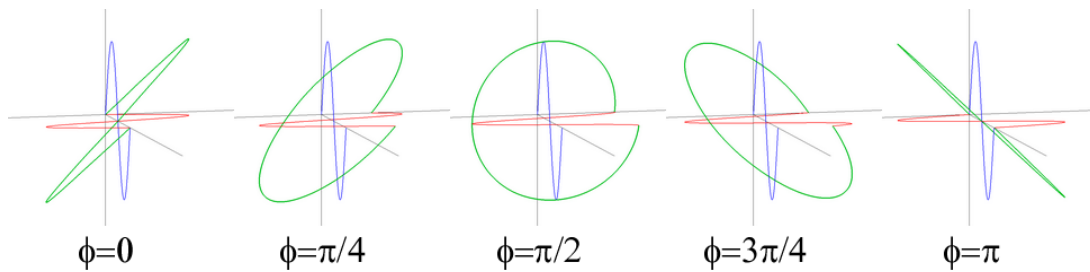


図 10: 位相差変化と波の形状の変化

偏光とは 90° 異なっている。これら以外の位相差の場合は、軌跡は楕円を描き、楕円偏光 (elliptically polarized light) と呼ばれている^{*31}。直線偏光子を通して楕円偏光を観察すると、直線偏光と自然光が混ざった状態との区別が困難であるが、この状態も、純粋な偏光である。

図では、横方向の波を紙面奥側に移動することにより位相差をつけている。つまり、垂直 (y 方向) の波の位相が進んでいる。位相差が $\pi/2$ の状態に着目すると、緑の線は右ネジのラセンとなっている。また、波が手前方向に進行するとすれば、緑の線と進行方向に

^{*31} ここでは、それ以外を楕円偏光という書き方をしたけれども、楕円偏光が一般的な偏光状態で、その中で、特別な位相差の時が直線・円偏光という言い方の方が一般性がある。

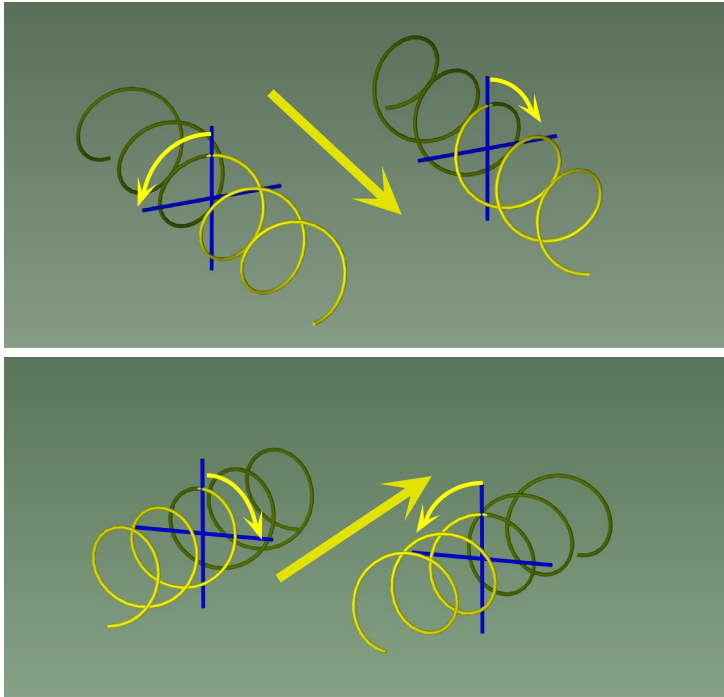


図 11: 円偏光。右の円偏光が右ネジ、左の円偏光が左ねじとなっている。ネジが回転することなく直進する状況を考える。ネジが進んでくる方向（検出器側）から見ると、ネジの山がある平面を横切る交点は、右ネジは時計回り（右円偏光）、左ねじは半時計回り（左円偏光）となる。これが、光学流儀の円偏光の左右の定義である。ネジが進んでいくのを後ろ（光源）側から見ると、検出器側から見る場合とは逆に、空間右ネジが反時計回り（左円偏光）、左ねじが時計回り（右円偏光）となる。これが物理流儀の円偏光の左右の定義である。

垂直な面の接する点は時計回りに移動する。これが、光学屋定義の右円偏光である^{*32}。^{*33}

^{*32} 光源が遠方にあり光源から光が向かってくるのを観察する状態で、光線に垂直な平面を考え、円（楕円）偏光の振動が平面を横切る点が時計回りに回転するのを右円偏光、反時計回りに回転するのを左円偏光とするのが光学屋流儀の左右円偏光定義である。これに対して観察者が光源にいて離れていく光を観察するときに、平面を横切る点が時計回りに変化するのを右円偏光、反時計回りに変化するのを左円偏光とするのが物理や流儀である。光学屋流儀と物理屋流儀で見る方向が反対側であるために、定義される偏光の左右が逆になってしまっている。光学屋流儀では、 y 軸成分の位相が $0 < \phi < \pi$ の間が右円偏光で、それ以上になると左円偏光になる。物理屋流儀では逆である。

^{*33} 円偏光のらせんが空間的に右ネジか左ネジかは書籍により異なる主張がなされている。辻内の光学概論は光学流儀の記述だが、右円偏光については空間的に左ネジと書かれている（辻内順平、光学概論 I、P16、朝倉書店）。ヘクトの光学にある図では右円偏光は右ネジとなっている（ヘクト 光学 II、71P、丸善）。ヘクトの図のネジは回転することなく進むと想定されているのに対して、辻内の左ネジはネジの回転により進行し、その時にネジの1点の運動に着目しているように思える。

8 光学的等方体と異方体

水や空気、ガラスなどの物質の屈折率は光の進行方向や偏光方向によらず同じ値を示す。このような性質を光学的等方性 (optically isotropic) と言う。それに対して液晶のように、光の進行方向や偏光方向により屈折率が変化するのを光学的異方性 (optically anisotropic) と呼ぶ。

誘電率テンソル (permittivity tensor) は 3×3 の 2 階テンソル (second rank tensor) で座標変換により対角化できる。等方的な物質では 3 つの対角成分は同じ値となるが、異方性のある物質では、3 つのうち一つのみ異なっていたり、3 つともそれぞれ異なる値であったりする。屈折率は誘電率から求められることを考えると、誘電率に異方性がある物質では屈折率も異方性を持つことになる。誘電率と同様に直交する 3 つの軸方向の屈折率 n_x 、 n_y 、 n_z を定められる。光学的等方体では、これら 3 つの屈折率が等しく、異方体では異なった値を持つ。

光学的異方体には 2 つの状況が考えられる。1 つは、 $n_x = n_y \neq n_z$ のように 1 つの軸の屈折率が他の 2 つと違うもので、このような物質は光学的 1 軸性 (optically uniaxial) と呼ばれている。光学的 1 軸性物質で、 $n_x = n_y < n_z$ の物質は正の光学的 1 軸性、 $n_x = n_y > n_z$ の場合は負の光学的 1 軸性と呼ばれる。もう 1 つは 3 つの軸方向の屈折率が全て異なった値を持つもので、これは光学的 2 軸性 (optically biaxial) と呼ばれている^{*34}。光学的 2 軸性物質では $n_x < n_y < n_z$ となるように軸を設定する。

9 固有偏光

光学的 1 軸性物質に x 軸に平行な方向に直線偏光が透過するとき、偏光面が y 軸に平行でも垂直でもない場合には、図 12 の左下側に図示するように入射光の偏光状態は物質を透過するにつれて変化していく。しかし、偏光面が y 軸に平行か垂直な場合には、偏光状態が変化せずに物質中を進行する。このように、物質中を進行するときに偏光状態が変化しない光を固有偏光と呼ぶ。

透過により偏光状態が変化していくような偏光も、2 つの固有偏光成分に分離すると、それぞれの固有偏光の偏光状態は変化せずに、互いの位相のみが変化していくので、物質透過後に 2 つの固有偏光を合成すれば、透過後の偏光を簡単に決定できる。図 12 の右上

^{*34} この 2 軸とは、屈折率が偏光方向によらず一定で、その方向に進む光にとっては、物体が等方的に感じられる「光軸」が 2 本あるということを意味している。

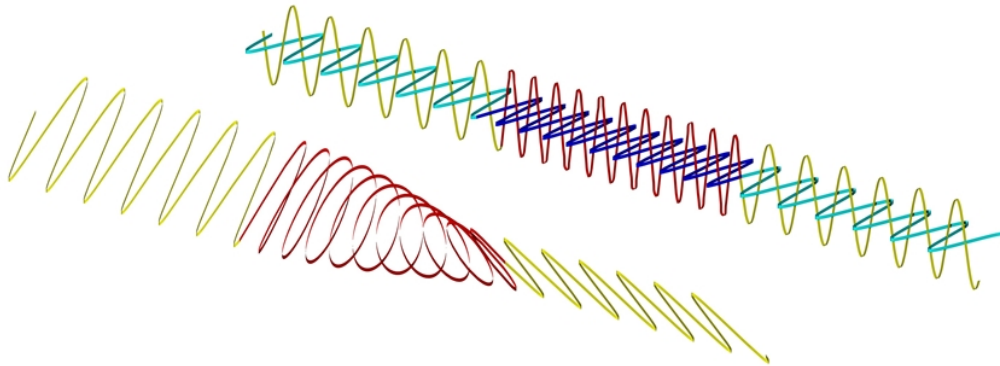


図 12: 固有偏光に分離する

は左下の偏光を2つの固有偏光の分離して示したもので、入射前には2つの偏光の位相は同じであるが、物質透過後には、位相差が生じており、合成すれば、左下図となる。

固有偏光は便利な概念であるが英語の文献にはあまり出てこない^{*35}。光にとっては、固有偏光というのは人間が勝手に光の成分を分けてつけた物で、そんな具合に分れて進行しているつもりはないというところかもしれない^{*36}。

砂糖水のように旋光性 (optical activity) のある複屈折のない物質では直線偏光は進行と共に傾き面が変化してしまうために、固有偏光ではなく、左右の円偏光 (circularly polarized light) が固有偏光である。左右円偏光の屈折率が異なり、両者の位相差 (phase difference) が変化していくために、合成して得られる直線偏光の偏光面が変化してい

^{*35} 結晶工学：森北出版株式会社 1975 年では 112 頁では固有偏光ではなく特有偏光という言葉が使われている。136 頁では、ジョーンズ計算の中で eigen vector が光強度を表す eigen value とともに使われ、固有偏光、固有値と記されているが、eigen vector は意味が広すぎると思う。164 頁では、allowed vibrations, vibrations privilegies には定まった訳語がないとしながら、訳語として固有偏光を当てている。この部分によると、国内で固有偏光の外国語表記として eigenpolarization という用語が使われているが、外国文献での使用例がないことも記されている。現時点で固有偏光の英訳を探すと intrinsic polarization という言葉も出てくるが、その発祥はよく分らない。あまりに不思議だったので、Field Guide to Polarization(SPIE PRESS) やら Introduction to Modern Optics DOVER やら、ヘクトの教科書も眺めたのだけれども、固有偏光に相当する用語が見つけれられていない。たとえば、ヘクトでは日本語訳部分で「異常波は試料中を正常波より早く進む」という表現 (2 巻 105 頁) を使っており、英語ではさらっと e-wave と o-wave という言葉が使われていたりする。一方、T. Scharf の本では eigenpolarization という用語が出てくる。なんか、ドイツ語のにおいがする。

^{*36} 固有偏光に分れて進むというのは、そういう意味では正しくない表現で、固有偏光に分けて考えることが出来る。という方が良さそうだ。

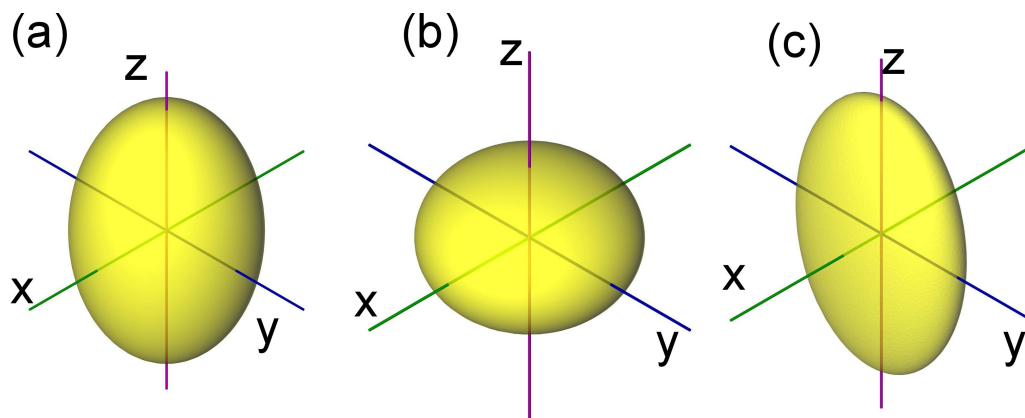


図 13: 屈折率楕円体。正の光学的 1 軸性物質ではラグビーボールような形状となるが、これは、光軸方向の屈折率が極めて大きな場合で、実際の物質では、このような楕円体とはならず、球状に近いものである (a)。負の光学的 1 軸性物質では、押しつぶしたような形状に (b)、光学的 2 軸性物質では扁平な楕円体 (c) となる。

く*37。

10 屈折率楕円体と屈折率ベクトル面

x 、 y 、 z のそれぞれの軸上に、 $\pm n_x$ 、 $\pm n_y$ 、 $\pm n_z$ の大きさの点を取り、それらを通るように描いた 3 次元楕円構造を屈折率楕円体と言う。正の光学的 1 軸性物質では屈折率楕円体はラグビーボールのような回転楕円体となり、光学的 2 軸性物質ではラグビーボールを押しつぶしたような扁平な形状となる。

屈折率楕円体により、任意の方向で入射した光線が感じる屈折率を求めることができる。入射光線に対して、垂直で座標の原点を通る平面で屈折率楕円体を切断する。屈折率楕円体の切断面は楕円となるが、この楕円の長軸と短軸が、その入射方向における固有偏光の 2 つの屈折率となる。

10.1 光学的 1 軸性物体

まず、光学的 1 軸性物体について切断面を見ることにする。

*37 コレステリック液晶のように、複屈折と旋光性の両者を有する物質では、固有偏光は楕円偏光となる。ただし、楕円の主軸方向は、液晶の配向変化に応じて変化してしまうので、厳密に固有偏光といえるのかは自信のないところもある。

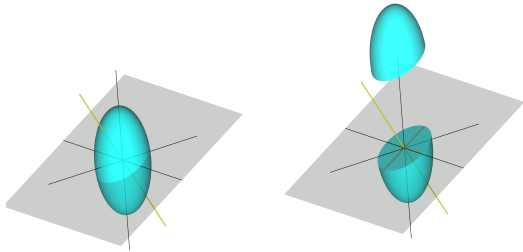


図 14: 1 軸性物質の屈折率楕円体。縦長の楕円体でこれは正の複屈折物質。右側はある方向の光線に垂直な面での切断で、これがこの方向に波面法線を持つ光の常光と異常光の屈折率になる。

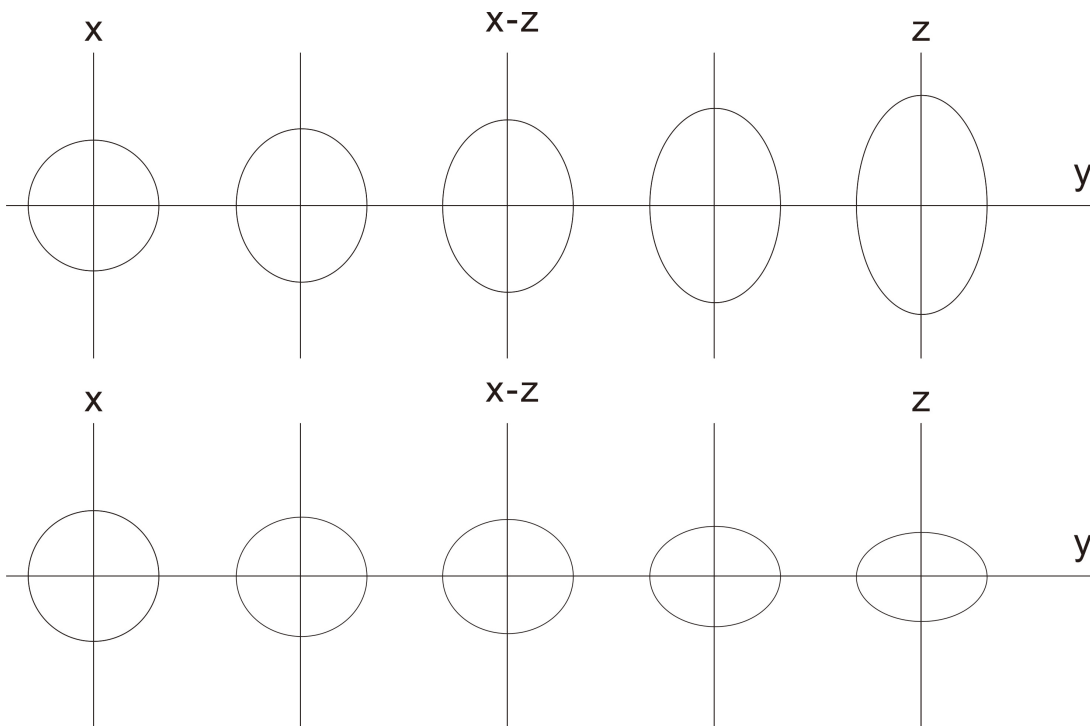


図 15: 屈折率楕円体の切断面。上は正の光学的 1 軸性物質、下は負の光学的 1 軸性物質。左端では光線は z 軸に平行な状態で、光は x 軸方向と y 軸方向の屈折率を感じる。 $n_x = n_y$ なので、屈折率楕円体の断面は完全な円であり、屈折率は偏光面に依存せず等方的になっている。このように、屈折率が偏光面によらず一定となる光線の進行方位を光軸と呼ぶ。光学的 1 軸性物質の光軸は z 軸である。入射方向が z 軸から x 軸方向に傾いていくと z 軸方向の成分が加わっていくので、円の一方が伸縮し楕円となる。一方で y 軸に平行な成分の大きさは変化なく角度によらず一定値を保つ。

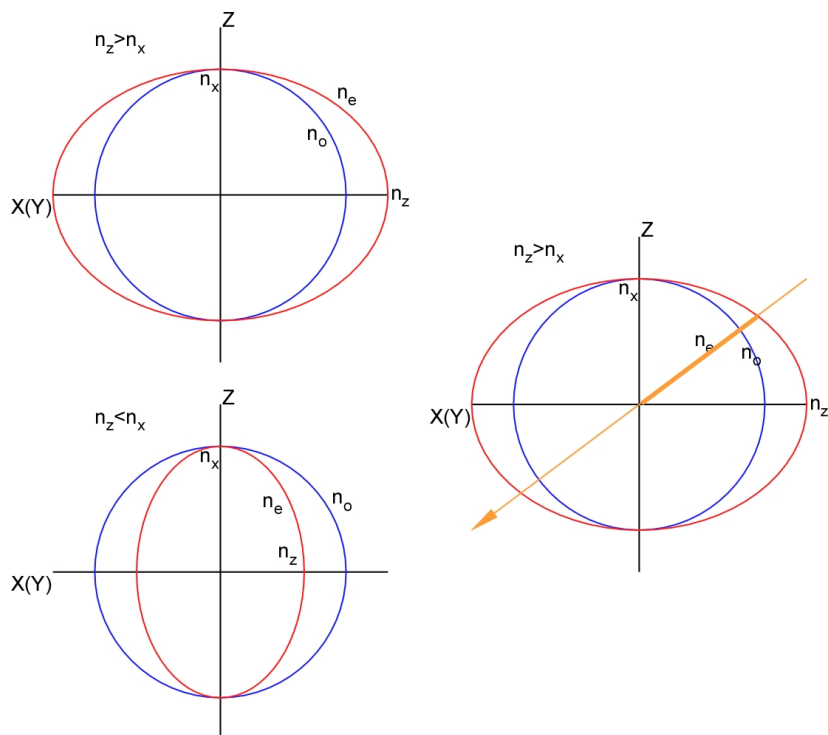


図 16: 屈折率面。進行方向の光に対して常光と異常光が感じる屈折率の長さの集合体。常光の屈折率面は球となる。正の一軸性物質の場合は異常光屈折率は常光の外側に膨らみ、負の一軸性の場合は内側で縦長になる。

図 15 に入射方向により 1 軸性異方体の屈折率楕円体の断面がどのように変化するかを示した。入射光は xz 面内で z 軸方向から x 軸方向へと傾いていく。 z 軸に平行な光線が感じる屈折率は n_x と n_y であり、これらは等しいため、屈折率は偏光面に依存せず均一（等方的）となる。傾いていくと、 xz 面内方向に振動する偏光に対しては正の一軸性では屈折率が大きく、負では小さくなっていく。一方、 y 軸方向に振動する偏光の屈折率は入射角に依存せず一定の値となる。屈折率が入射角により変化してしまうと、屈折率を一定とした屈折の法則とは不一致が生じる。このため異常光 (extraordinary ray) と呼ばれる。それに対して y 軸方向に振動する偏光は屈折の法則に従った挙動を示すため常光 (ordinary ray) と呼ばれている。

ある方向に進行する光に対する屈折率を常光と異常光に分けて面で表した図を屈折率面（屈折率ベクトル面）という。 z 軸方向以外では異常光と常光の屈折率が異なるため、2 重の曲面となる。

常光に関しては、屈折率に方向依存性はなく、屈折率面は球面となる。正の複屈折物質では、 xy 面内を進行し、振動面が xy 面に垂直な光は z 軸方向の屈折率を感じるので、常

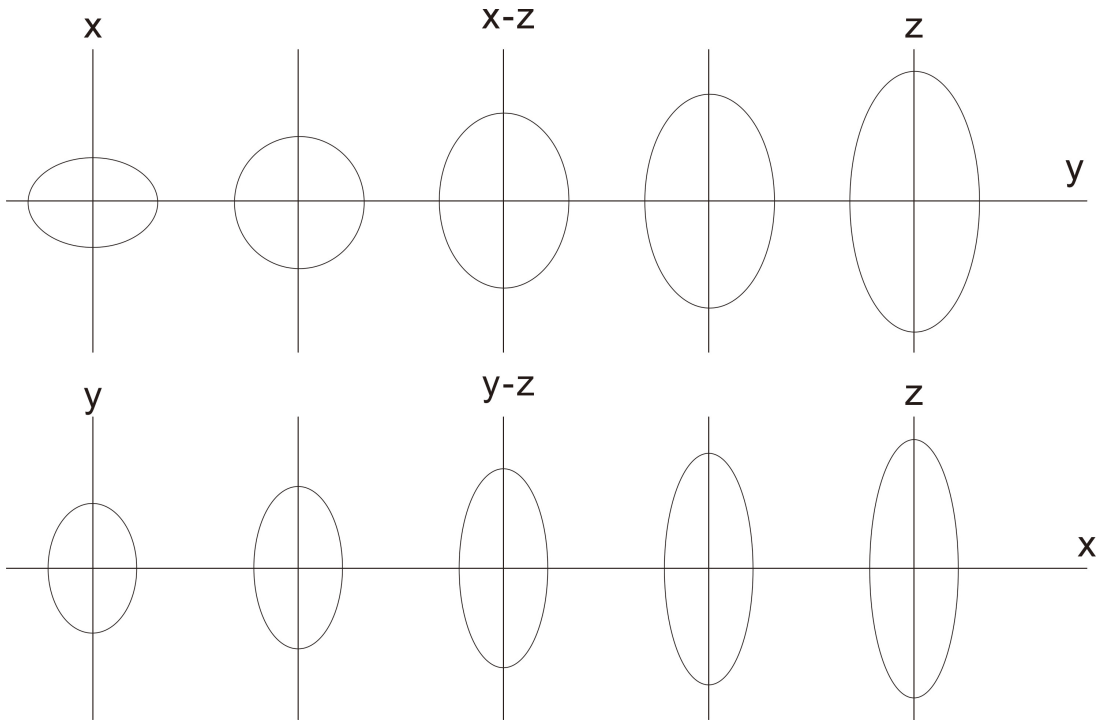


図 17: 屈折率楕円体の切断面。上は z 軸方位から x - z 面内で入射光が x 軸方向へと傾いている。下は z 軸方位から y - z 面内で入射光が傾いていく。

光の球面の外側の円周となる。 z 軸方向では常光の屈折率に収束する。異常光の屈折率面は扁平に広がった形状となる。負の複屈折物質では異常光の屈折率面は常光の球面の内側の曲面となる。

z 軸からの極角 $\theta = 0$ の方向に進行する光が感じる屈折率は常光と異常光に対して次式のようにになる。

$$n_o = n_x = n_y$$

$$n_e = \frac{n_o n_z}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_z^2 \cos^2 \theta}} \quad (35)$$

10.2 光学的 2 軸性物体

x 、 y 、 z の 3 つの軸方向の屈折率が異なる物質では屈折率楕円体は扁平につぶれた形状となる。(図 13)(c)。この場合も、ある方向に進行する光が感じる屈折率は原点を通り、光の進行方向に垂直な面が形成する楕円の長軸と短軸で与えられる。

z 軸に平行に進む光を考えると、屈折率楕円体の断面は長軸方向が y 軸、短軸方向が x

軸の楕円となる。偏光面により屈折率が変化するので、1軸性結晶の場合と異なり z 軸は光軸ではない。光の進行方向が xz 面で傾いていくと y 軸方向の屈折率は不変だが、楕円の短軸が膨らんでいき、ある角度で円となる。この状態で物質の屈折率は偏光面方向によらず一定である。この方向が光軸である。 x 軸の負の方向に傾く場合も同様に断面が円となる角度があり光軸は2本存在する。これが光学的2軸性の名前の由来である。一方、 yz 面内の傾きでは x 軸方向の屈折率は変化せず、 yz 方向の屈折率が大きくなっていく。 x 軸方向の屈折率が最小であるため、楕円は伸びる一方で途中で断面が円となることはない。

2軸性物質の屈折率面は光軸の方位で交差する複雑な面となる。まず xy 面を考える。面に垂直な振動面の光は方位角 ϕ によらず n_z を感じる。面に平行な光の屈折率は方位角に依存し、 x 軸方向の n_y から y 軸方向の n_x と図 18(a) のように変化していく。 yz 面も同様に、面に垂直な光の感じる屈折率は角度によらず n_x であるのに対して平行な光は n_z から n_y へと変化する (図 18(b))。最後の xz 面を考えると、同様に面に垂直な偏光は n_y を感じ、平行な光は n_x から n_z へと変化していくのだけれども、 $n_z > n_y > n_x$ であるために、2本の線はある角度で交差することになる図 18(c)。これは、 xy 面にも yz 面にもなかった特徴である。3つの面を組合わせたのが図 18(d) である。これらの曲線を結んだ曲面は xz 面の点で交差する形状になる。通常は2つの面が交差する場合には交差は線であるが点となる。

1軸性物質では光軸に対して垂直な振動面の偏光は進行方向によらず屈折率は変化しない。しかし、2軸性物質では、光軸に対して垂直な振動面を持つ偏光でも屈折率は進行方向に依存して変化する。1軸性物質のように、屈折率が光の進行方向に依存せず一定となる偏光面は存在しない。屈折率の角度依存性は複雑で、2本の光軸からの角度に依存し

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{2\gamma^2\alpha^2}{(\gamma^2 + \alpha^2) + (\gamma^2 - \alpha^2)\cos(\phi - \phi')} \\ n_2^2 &= \frac{2\gamma^2\alpha^2}{(\gamma^2 + \alpha^2) + (\gamma^2 - \alpha^2)\cos(\phi + \phi')} \end{aligned} \quad (36)$$

となる。 α 、 β 、 γ は、 x 、 y 、 z 軸に平行に振動する光に対する屈折率で、 $\alpha < \beta < \gamma$ である。また、 ϕ と ϕ' はそれぞれの光軸からの角度である。式の中に明示的に β が出てこないが、光軸の方位に関わっており、それを通して式には取込まれている。2軸性結晶では複屈折の正負は、 z 軸と光軸の間の角度が 45° 未満の場合は正、 45° より大きい場合には負と定義されている^{*38}。

^{*38} 1軸性物質の場合は $n_z < n_x = n_y$ が負の条件だったが、2軸性の場合は常に n_z は他より大きな値であ

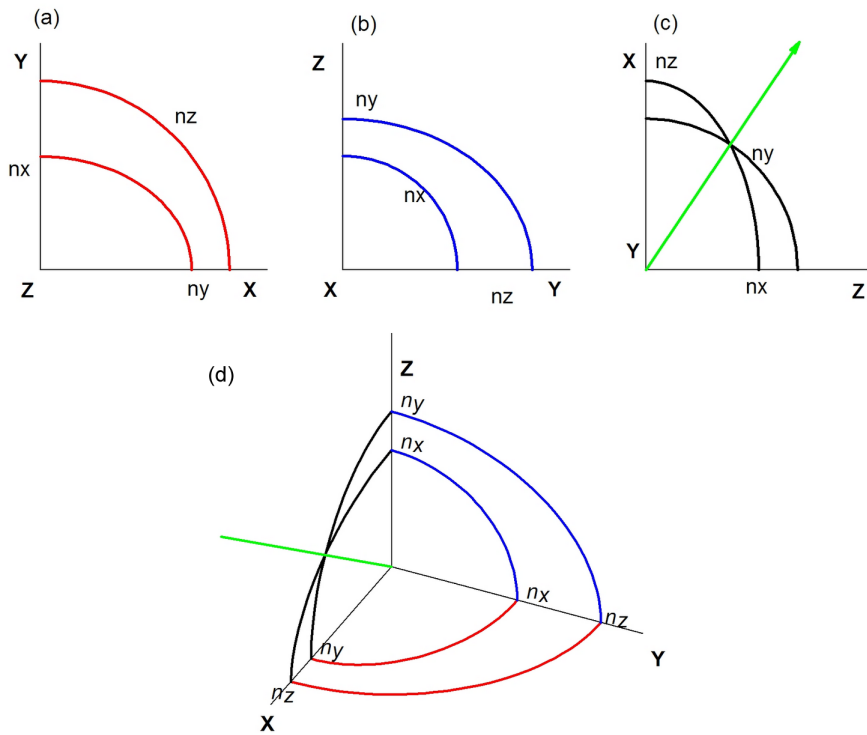


図 18: 2 軸性物質に関する (a)~(d) の 4 つの図。

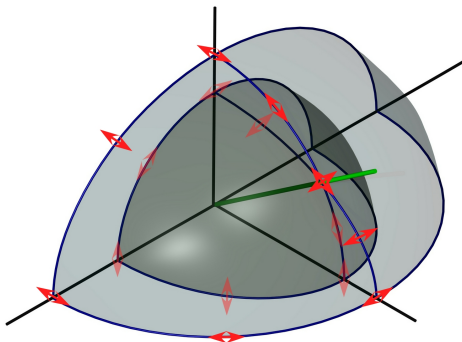


図 19: 2 軸性物質に関する立体図

2 軸性物質でも、1 軸性物質と同様に光線速度面と法線速度面を描ける。法線速度が偏光方向に依存せず一定となる光軸方位と、光線速度面において光線速度が偏光方向によらず一定となる光線軸方位とは一致しない。

る。

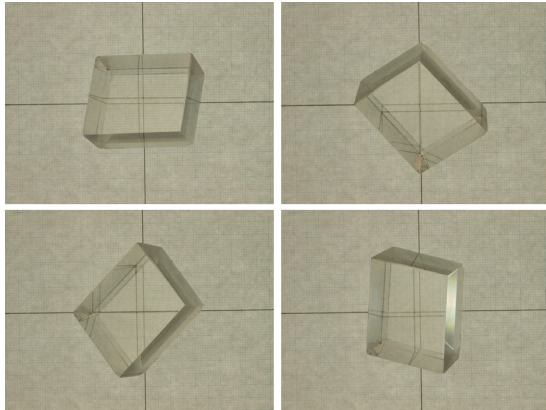


図 20: 方解石は透明な負の 1 軸性結晶で、平行 6 面体形状をしている。十字線の上に方解石を置くと十字線が二重に見えるが、一方の十字線は方解石の外側と素直に繋がっていて、もう一方はずれが生じている。方解石を回転するとずれの方向も変化する

11 複屈折物体中の光線方向と波面法線

図 21 に方解石を通してものを見た写真を掲載する。写真にも示されているように方解石を通すと物体が 2 重に見える。十字線を使って詳細に観察すると、二重の像の一方は、真上から見て通常ガラスなどと同様に、位置を変えることなく方解石を透過しているのに対して、もう一方の像は方解石中を斜めに進行して、出射していることが分かる。偏光フィルムを使うと、それぞれの出射光はいずれも直線偏光となっている。この奇妙な現象は、屈折率の異方性を考慮して、ホイヘンスの原理を適用すると理解出来る。

ホイヘンスの原理では、ある瞬間の波面各点から放出される波の重ね合わせとして次の波面が形成される。屈折率が等方的な場合には放出される波は球面波として広がっていく。異方性物体では異常光では屈折率が光の進行方向に依存するので異常光の波面は球面ではなく楕円面となる^{*39}。楕円の形状は、屈折率異方性からそれぞれの方向に対する光速を求めることにより決定される。こうして得られた立体的な楕円を光線速度面と言う。

ホイヘンスの原理を使って異常光の進行方向を作図により求めるためには、それぞれの軸方向に $v_x = c/n_x$ 、 $v_y = c/n_y$ 、 $v_z = c/n_z$ をとった光線速度面が必要となる。正の複屈折物質の光線速度面は常光の球面の光線速度面の内側の曲面となり、負の物質では扁平に広がる曲面となる。

図 23 に 1 軸性物質に対して常光と、光軸が界面に平行/垂直な場合のホイヘンスの原理

*39 常光の波面は球面である。

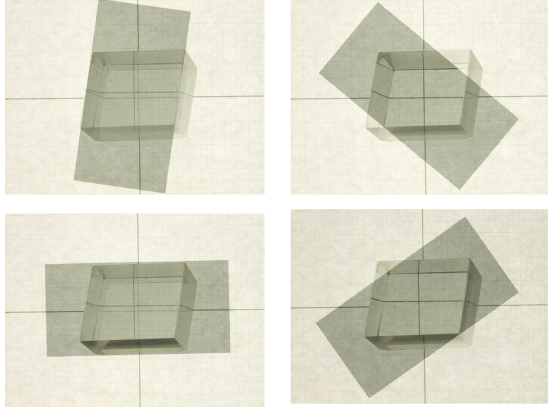


図 21: 方解石の上に偏光板を置いたもの。偏光板の軸が方解石の辺と平行な場合には十字線は二重に見えているが特定の方向になると、一方のみが透過する。このことから、二重線はそれぞれ直交方向に偏光していることが分かる。

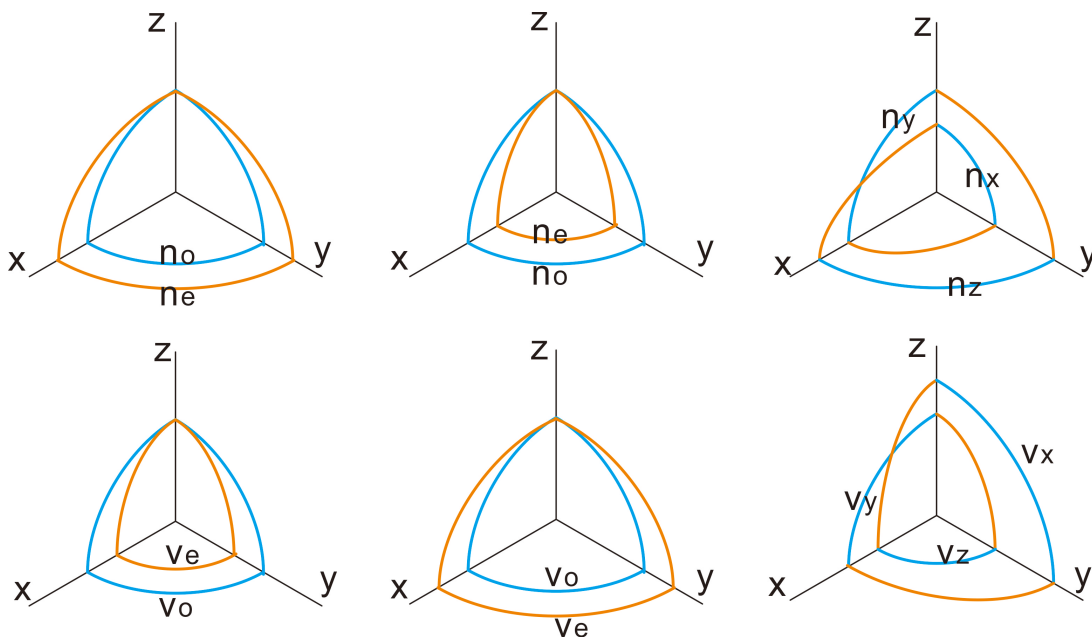


図 22: 屈折率面と光線速度面。上段が左から正の一軸性、負の一軸性、2軸性物質の屈折率曲面。下段はそれぞれの光線速度面。屈折率が大きいと光線速度は低下するので、上段と下段で曲面の伸長方向が逆になっている。

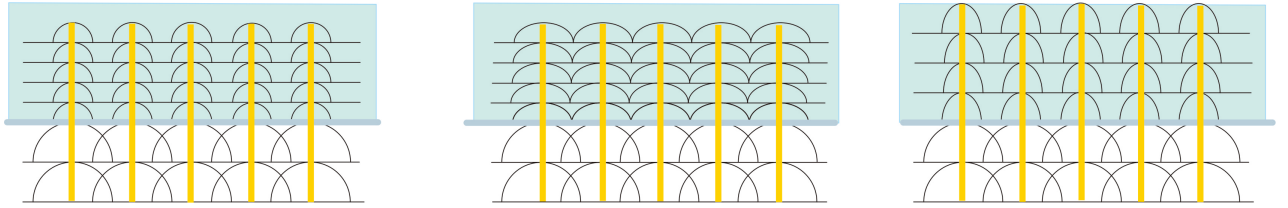


図 23: 垂直入射の物質内部の光線の進行方向と波面法線の様子。左端は常光。右 2 つは異常光だけれども、光軸が界面に垂直（真中）場合と、界面に平行（右）の場合。

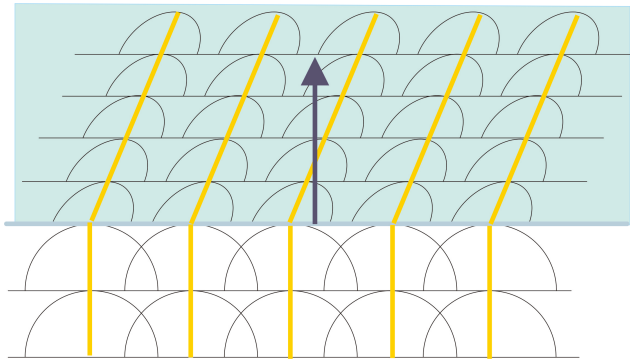


図 24: 光軸は界面に対して傾いている場合に光線進行方向と波面法線方向。

による作図を示した。異常光に対しては界面以降で生じる 2 次波は楕円だが、界面に対して長軸が平行か垂直であるため、包絡線は界面に平行で、波面の出発点と新たな波面を形成する点を結んだ光線の進行方向も界面に垂直となっている。図は負の 1 軸性物質のものであるので、光軸が界面と平行な場合には異常光の速度は常光より速くなっており、物質中を透過するにつれて波面の位置が異なっていく。常光と異常光の間に位相差が生じていくのである。

続いて、界面に対して光軸が傾いた場合を扱う（図??。常光に関しては図 23 と変わらないので、図には異常光のみを示している。光線速度面は界面に対して傾いた形状であり、新たな波面を形成する点と波面の出発点を結んだ光線方向は界面の法線方向とは異なった傾いた方向となっている。一方、波面事態は界面に平行である。この場合は光線の進行方向と波面法線（ k ベクトル）方向が異なっている。

ホイヘンスの原理により斜入射時の屈折角を求める作図では屈折光の波面が定まり、入射光の波面法線方向と屈折光の波面法線光の間に屈折の法則が成立する。等方性物質では波面法線方向と光線方向は一致するのでどちらを考えても同じとなるが、作図を考えると、屈折の法則は波面法線方向に対して成り立っているものである。そして、波面法線に着目すれば、異常光に対しても入射光が界面に垂直なら、内部を進行する光の波面法線も

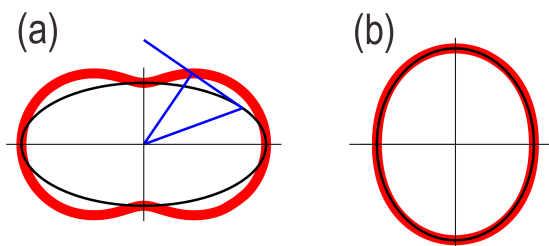


図 25: 光線速度面と法線速度面。(a) 違いを見やすくし、描き方を示すため、常光と異常光の光線速度を大きく変えて描いている。(b) 常光屈折率 1.5、異常光屈折率 1.7 での作図。

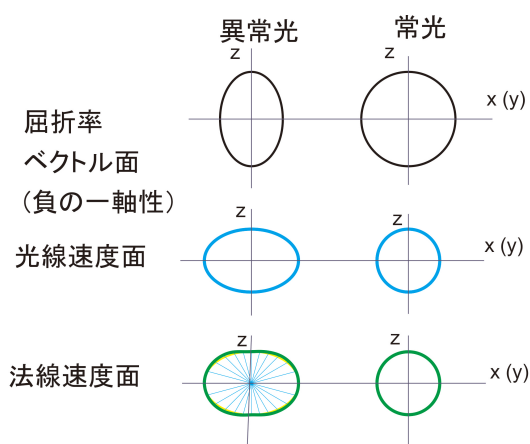


図 26: 屈折率面、光線速度面、法線速度面。

界面に垂直であり、 $n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$ という屈折の法則を満たしている。

ホイヘンスの原理で描かれる波面は同位相面である。複屈折物体の通過による位相変化は波面法線方向の速度により定まり、これは光線速度とは異なるもので波面法線速度と呼ばれている。法線光線速度を求めるには、光線速度面の接平面と、そこに下ろした垂線の交点を繋いで行けばよい。そのようにして描いたものが図 25(a) である。図では光線速度面の外側に繭型の曲線が描かれている。この面を法線速度面と呼ぶ。ただし、図では光学異方性を実際以上に強調しており、例えば、 $n_e = 1.7$ 、 $n_o = 1.5$ 程度の物質で作図すると図 25(b) のように、光線速度面とほぼ重なるような曲面となる。図 26 に屈折率曲面、光線速度面、波面法線面を示す。

12 面内に光軸のある 1 軸性フィルムへの垂直入射

一番簡単な場合として光軸がフィルム面内にある平行フィルムに垂直に直線偏光が入射する場合を考える。偏光面は光軸方向から θ 傾いているとする。固有偏光は $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ 方向で、前者は n_e を後者は n_o を感じる。ここで、 $n_e n_o$ の正の 1 軸性物質を考えることにする。すると、光軸に平行な振動面を持つ光の方がフィルム中をゆっくりと進行する。フィルムの厚みを d とすると、フィルムを抜けるのに必要な時間は平行な偏光が $d/(c/n_e) = dn_e/c$ 、垂直な偏光 $d/(c/n_o) = dn_o/c$ がなので、遅い方の光がフィルムを出るときに、先に出た方の偏光は $\delta l = (dn_e/c - dn_o/c)c = d(n_e - n_o)$ だけ先に進んでいる。この差を optical path difference(OPD) という^{*40}。

OPD は、複屈折量が波長に依存しないなら波長によらず一定値である。OPD は、2 つの固有偏光が複屈折物体を透過した後の波面位置の差であるので、それを波長で割り 2π をかければ、2 つの固有偏光の位相差となる。OPD は固有偏光の屈折率差 Δn と光が透過した長さ d の積 Δnd で与えられるので位相差は $\phi = 2\pi\Delta nd/\lambda$ となる。

12.1 位相差と透過光量

クロスニコル間に、ある位相差を与える複屈折物質が挟まれている状況を考える。まず初めに、入射偏光の偏光面が 1 軸性物質の光軸に対して 45° の場合を考える。このとき、入射光線は、常光成分と異常光成分に 1:1 の割合で分割される。試料透過後に両者には位相差が生じており、位相差に応じて偏光状態が図 27 のように変化する。アナライザーを透過する光の強度を位相差の関数として示すと図 27 の右のように位相差が π の時に入射光が完全に透過するようになる。位相差を ϕ として透過光量 I は $I/I_0 = \sin^2 \phi/2 = \sin^2 \pi\Delta nd/\lambda$ となる。

1 軸性物質の光軸と偏光子の透過軸が 45° でない場合には、2 つの固有偏光の割合は 1:1 ではなくなる。図 28 に入射偏光の偏光面が屈折率楕円体の長軸から 22.5° 傾いた場合に、偏光状態がどのように変化していくかを示した。位相差の増加とともに、直線偏光は楕円偏光となるが、 $\phi = \pi/2$ でも円偏光にはならず偏光子方向が長軸の楕円偏光となる。 $\phi = \pi$ で直線偏光となり、その方位は元の直線偏光の方位から、 45° 度傾いた方向となっている。

^{*40} 多くの書籍では OPD ではなくリタデーション、またはレタデーション (retardation) と表記されている。

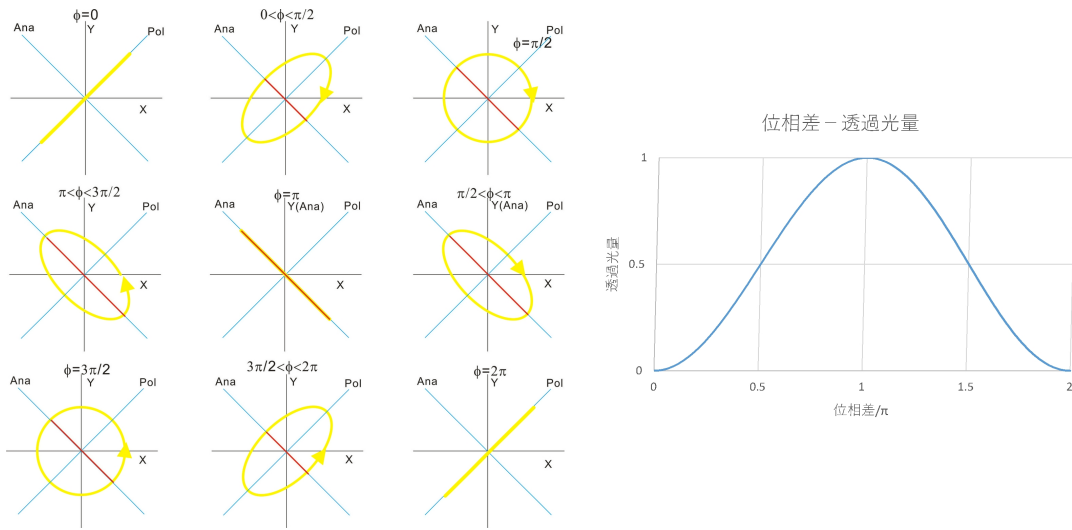


図 27: 偏光方向と光軸が 45° 異なる場合の位相差による偏光変化とクロスニコル間での透過光量

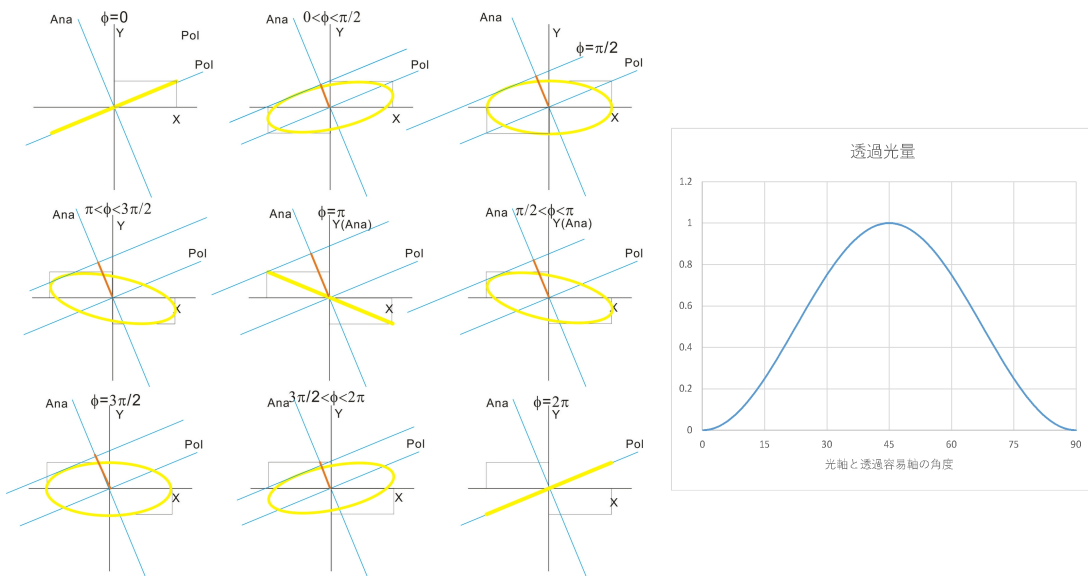


図 28: 偏光方向と光軸が 22.5° 異なる場合の位相差による偏光変化とクロスニコル間での透過光量。右側には透過光量の最大値の偏光方向と光軸の角度依存性を示す。

透過軸を直交配置とした偏光子と検光子の間に光学的 1 軸性物質を光軸を光の進行方向に対して垂直に挿入した場合の透過光量は、偏光子の透過軸に対する光軸の角度を θ 、透過後の位相差を δ として、

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (37)$$

で与えられる。

12.1.1 $\lambda/2$ 位相差板と $\lambda/4$ 位相差板

ある波長 λ において、位相差 π を与える位相差板を $1/2$ 波長板と呼ぶ。上では、 45° と 22.5° の場合しか示さなかったが $1/2$ 波長板に直線偏光を入れると偏光面と光軸の角度を θ として、位相差板を通過後の偏光面は元の偏光面に対して 2θ 回転する。また、 $1/2$ 波長板に円偏光を入射すると、出射後の円偏光の掌性が反転する。

楕円偏光を長軸方向の直線偏光と短軸方向の直線偏光の合成物として考えると、両者の位相差は楕円率によらず $\pi/2$ である。それ故、どちらかの直線偏光の位相を $\pi/2$ ずらせてやれば、2つの直線偏光は同位相 (逆位相) となり合成した波は直線偏光になる。 $1/4$ 波長板の与える位相差は $\pi/2$ であるので、 $1/4$ 波長板の光軸を楕円偏光の長/短軸に合わせれば、出射偏光は直線偏光となる。これを利用したのがセナルモンコンペンセータで、セナルモンコンペンセータによる位相差の測定については、偏光顕微鏡の章で取り上げる。

13 偏光色

式 37 の位相差を、OPD が一定の場合に、OPD と波長に書換えると以下の式となる。

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\pi \Delta n d}{\lambda} \quad (38)$$

横軸に OPD、縦軸に波長をとり、それぞれの波長の光の強度が OPD とともにどのように変化するかを示したのが図 29 である。OPD=0 では全ての光は遮断されている。OPD が増加すると、それぞれの光がクロスニコルを透過するようになるが、短波長の光ほど先に強度が強くなる。しかし、400nm の青色光は OPD が 200nm で透過強度が最大になった後は、強度が低下し、400nm で消光し、以後 400nm 周期で明暗を繰り返す。同様に 500nm の緑の光は 500nm 周期、600nm の赤い光は 600nm 周期での明暗の繰り返しとなる。

OPD が 0nm の出発点では、全ての波長が消光状態で、OPD が 300nm 程度までの範囲では、程度はことなっても、各波長の光が透過するようになっていくので色のない光になる。OPD が 400nm 程度になると、青系の光強度が下がるため、透過光は黄色みをおび OPD の増加につれて赤みが強くなっていく。OPD が 500nm 台の後半になると、青色光が復活する一方で赤色光が減少するため青系の色に変化する。

白色光を光源とした場合は、色々な波長の光が混ざったものを見る事になる。上に説明したように、波長毎に OPD に対して異なる周期で明暗を繰り返すため、混合光の色調

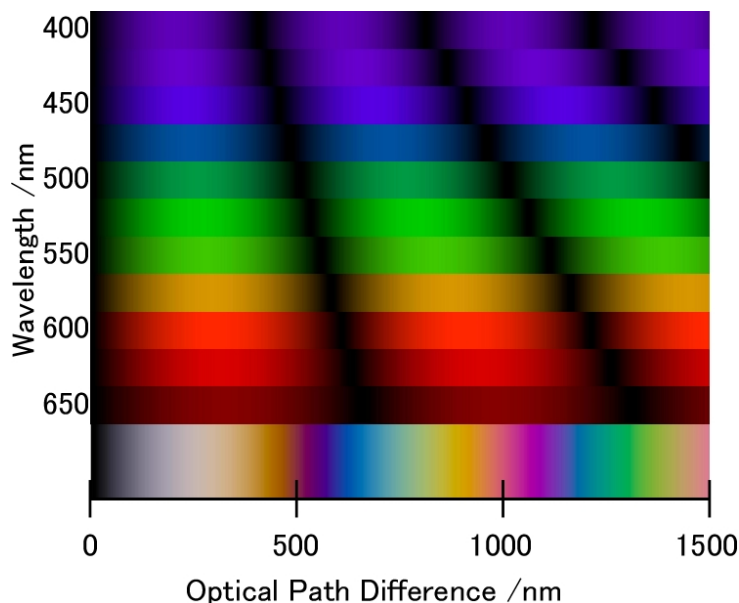


図 29: OPD の変化による可視領域の光の透過強度変化。下のラインは、OPD 毎の各波長を足し併せて生じる色調を示している。

は OPD により変化していく。これを色彩図表にしたのが偏光色図表 (polarization color chart) である。OPD が増加するにつれて、可視領域で複数の透過光極大や極小を持つようになるため、偏光色の彩度は低下し、最終的には中性色となる。

偏光色図表を干渉色図表 (interference chart) と表記している文献が多い。しかし、干渉は同じ波長と偏光をもった光波が波の重ね合せにより強弱が生じる現象で、ここで生じている現象は干渉の定義からは外れているため、干渉色図表という名称は科学的に不正確である。ただ、薄膜の干渉色の色調の厚さ変化が偏光色とほぼ同じ変化を示し、その図表が偏光色図表より前から存在していたこともあり、干渉色図表と呼ばれているように思う。

偏光色は、OPD で一意的に定まるので、細長い帯状の図表で十分であるが、横軸を厚みとして、図表中に複屈折量毎の斜線を引いたものが多い。この図表を活用すれば、偏光色と試料の厚みから複屈折量を、偏光色と複屈折量から試料の厚みを推定できる。

13.1 異常偏光色

通常の偏光色図表では、屈折率の波長分散が考慮されていない。水晶や方解石などの無色透明な無機物は分散が小さく波長分散を考慮していない偏光色図表を参照しても色調のずれが問題になることはない。しかし、液晶などの有機物には分散が大きいものもあり、

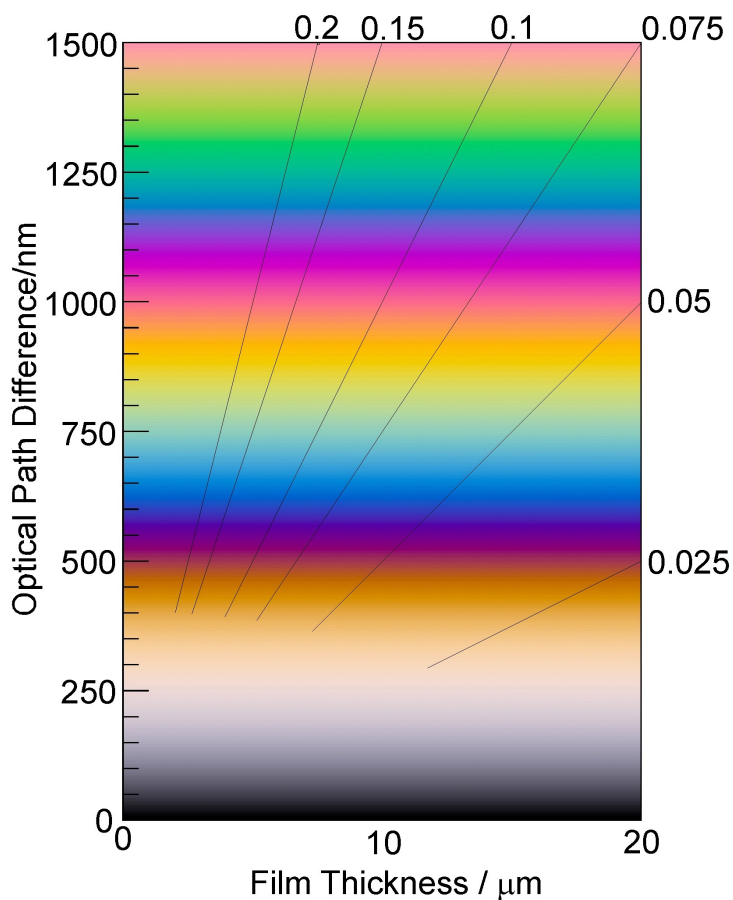


図 30: 偏光色図表

それらでは、偏光色図表からの色調のずれが目立つようになる。また、可視領域に吸収がある着色した物質でも、偏光色図表からのずれが生じる。分散を考慮しない偏光色から逸脱した発色を異常偏光色と呼ぶ。

13.1.1 分散の影響

π 電子を含む有機分子は透明に見える物質でも紫外領域に吸収を持ち、可視域の屈折率分散は大きい。また、液晶分子のように異方性の高い分子では分子長軸方向の吸収が短軸方向より長波長側にあることが多く、このため、 Δn の分散は大きい。Ehringhaus は、アッペ数に類似した複屈折の分散程度を示す次の指標を提唱している。

$$\Delta\nu = \frac{\Delta n_x - \Delta n_C}{\Delta n_D} \quad (39)$$

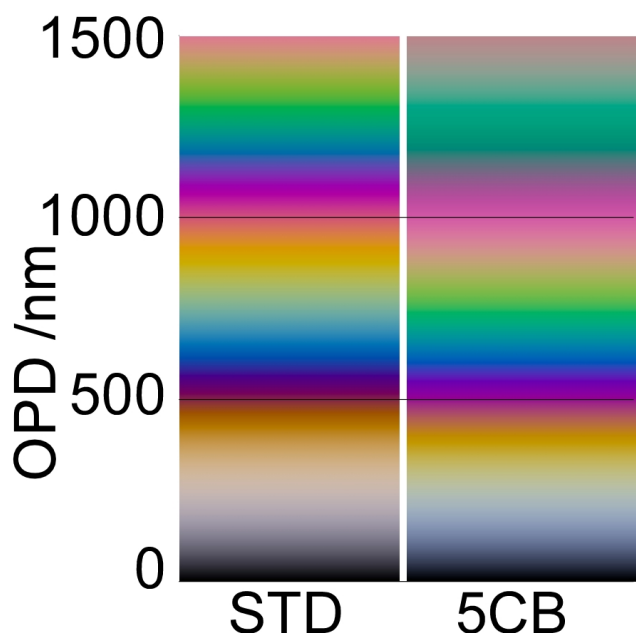


図 31: 偏光色図表と 5 CB の比較

ただし、 Δn_D 等はフラウンフォーファーの C、D、X 線における屈折率差である。この値が大きいほど複屈折の分散が大きい。Ehringhaus によると、この値が 30 未満の場合には標準的な偏光色からの逸脱が生じるとされている^{*41}。実験によく用いられる液晶物質である 5CB と MBBA について、データからこの値を計算すると、5CB で 7.2、MBBA で 4.5 といずれも大きな逸脱が予想される値となる^{*42}。

図 31 に標準的な偏光色と 5CB のデータを用いて作成した偏光色の対比を示す。リタレーションが小さい場合は差違は大きくはないが、リタレーションが 700nm 付近では色調が異なっている。5CB に見られる緑色は標準的な図表では、1300nm 付近に見られるものに近く見間違える危険性がある。

分散はコンペンセータを用いた複屈折の測定にも影響を及ぼす。詳細は偏光顕微鏡に関

^{*41} A. Ehringhaus, Neue Jahrb. Min., usw., B. B. 41, 342-419(1917). 坪井誠太郎、偏光顕微鏡、岩波書店 (1959) からの孫引き。原著は探したことはあるけれど見つからなかったので見たこともない。

^{*42} 5CB と MBBA の計算値は、山口@秋田さんのコーシーの係数をもとに計算した値を使っている。分子構造については、別の章で示す予定。

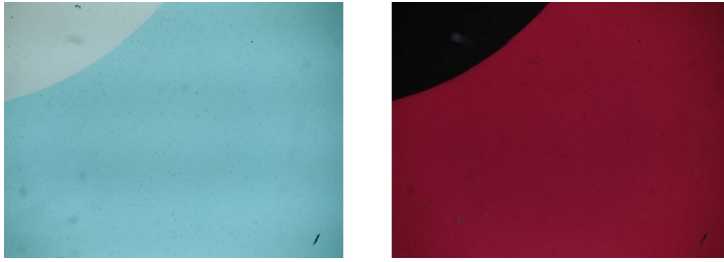


図 32: フタロシアニン配向膜の偏光色。左は単純な透過で膜は青く見えるが、クロスニコルにすると赤色になる。

する章で議論する。

13.1.2 吸収付近の影響

可視領域に吸収がある試料では、吸収による着色が加わるために、偏光色からの逸脱が生じる。また、吸収付近では屈折率が大きく変化するために、その影響も無視出来ない。

図 32 にフタロシアニン配向膜の透過とクロスニコル下の図表を示した。フタロシアニンは赤色領域に吸収を持つ顔料である。東海道新幹線の青色の帯に使われている色材で、透過光で青色に見える。膜厚は 100nm 程度と薄く、OPD の平均値はそれ以下の値であり、偏光着色は生じないレベルとなると、クロスニコル下では物体の吸収を反映して青色を帯びた色になるであろうと予想できる。ところが、実際にはクロスニコル下で赤色に見える。これは、フタロシアニンの赤色から近赤外領域の吸収帯の近傍では屈折率が大きな波長依存性を持ち、それに異方性があるために、赤色付近で複屈折が他の波長に比べて大きくなっているためと考えられる。

14 面内に光軸のある 1 軸性フィルムへの斜入射

光軸に垂直な入射面を考えると、p 偏光は常光、s 偏光は異常光となり、屈折率は入射角度によらず一定値となる。一方、物質中の光路長は角度に依存し増加する。厳密には常光と異常光で屈折角が異なるが、両者の差が小さくないとして屈折角を平均屈折率で置き換えられることにして内部角を θ とすると

$$OPD \approx (n_e - n_o)d / \cos \theta \quad (40)$$

と斜入射になると増加していく。

入射面が光軸を含む場合は入射角が大きくなると異常光屈折率が低下する。内部角を θ

として、OPD 値は

$$OPD \approx (n_e n_o / \sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta + n_o^2 \cos^2 \theta} - n_o) / \cos \theta \quad (41)$$

となる。位相差は角度とともに減少する。光路長は伸びるが位相差の減少の方が上回るため、OPD は減少する。これに対して光軸に垂直な入射面の光線では複屈折値は入射角に依存せず垂直入射と同じであるため斜入射で光路長が伸びると OPD も増加する。垂直入射時の偏光色を基準に 2 つの方向で偏光色は逆方向に変化するため、平行光束に比べて彩度が低下していく。

15 光軸が面に垂直な 1 軸性物質フィルム

光軸が面法線方向にあるフィルムでは、フィルムに垂直に光を入射しても、複屈折は生じず偏光状態も入射状態から変化しない。このため、クロスニコルにフィルムを挟んで垂直入射で観察しても等方的な物体と区別が付かない。

しかし、斜入射光に対しては、光は光軸でない光路で進むために複屈折が生じ、偏光が変化する。物質内でフィルムに垂直な方向に θ の角度で進む光に生じる OPD は近似的に次式で与えられる。

$$OPD = d(n_z - n_0) \sin \theta \tan \theta \quad (42)$$

ここで d はフィルムの厚さである^{*43}。平行光束では完全な暗視野になる状態でも斜入射光には 0 ではない OPD があるため、見込角の大きな対物レンズでは暗視野よりは明るい状態となる。ただし、光軸が界面に平行な膜と比べて OPD 値は $\sin \theta \tan \theta$ だけ小さくなるわけで、内部角が 30° でも水平配向の 3 割程度となる。また、水平配向セルとは異なり、OPD 値が 0 から最大値までの光束が同時に観察されるため、偏光色ははっきりしないものとなる。

*44

*43 フィルム中の角度 θ は常光と異常光で厳密には異なってしまわずだけれども、この式では常光、異常光とも、平均屈折率で屈折角が定まるとしている。

*44 式 42 の導出を「偏光顕微鏡」坪井誠太郎に従って紹介する。出発点となるのは、2 軸性結晶にある角度で入射した光の 2 つの屈折率を求める事である。式 36 より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) (\cos(\phi - \phi') - \cos(\phi + \phi')) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \sin \phi \sin \phi' \end{aligned} \quad (43)$$

図 33: コノスコープ観察のための光学系。

16 コノスコープ (Conoscope)

入射光線が平行光線ではなく、凸レンズで集光させた円錐状の光束を使えば、様々な入射角での複屈折量を画像として同時に観測できる。これがコノスコープ観察である。偏光顕微鏡ではベルトランレンズの挿入によりコノスコープ観察ができるが、偏光顕微鏡がなくとも、コノスコープ観察は可能である。図 33 にコノスコープ観察の光学系を示す。

これより

$$\frac{(n_2 + n_1)(n_2 - n_1)}{n_2^2 n_1^2} = \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)}{\gamma^2 \alpha^2} \sin \phi \sin \phi' \quad (44)$$

ここで、

$$\frac{(n_2 + n_1)(n_2 - n_1)}{n_2^2 n_1^2} \simeq \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)}{\gamma^2 \alpha^2} \quad (45)$$

という近似を使うと

$$(n_2 - n_1) \simeq (\gamma - \alpha) \sin \phi \sin \phi' \quad (46)$$

1 軸性物質では $\phi = \phi'$ なので

$$(n_2 - n_1) \simeq (n_z - n_0) \sin^2 \theta \quad (47)$$

試料の厚さを d とすると、角度 θ で進む波の透過距離は $d / \cos \theta$ なので、これより、 $\sin^2 \theta$ が $\sin^2 \theta / \cos \theta = \sin \theta \tan \theta$ となる。